Exercices : limites, continuité...

Limites, développements limités

Exercice 1 :

1. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.
2. Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ où $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^{\ln(\ln(x))} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

   Indication : on pourra effectuer un changement de variable judicieux.
3. Déterminer les limites éventuelles en $+\infty$ des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x) - x^2 + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + x^4 - 2\ln(x)} \text{ et } f_2 : x \mapsto \frac{x^2 + \mathrm{e}^{4x} - (\ln(x))^4}{\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - \mathrm{e}^{3x}}.$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

1. a) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $1 - x < f(x) \leqslant 1$.
   b) En déduire que f admet une limite finie à droite en 0 et déterminer la valeur de cette limite.
   c) Déterminer la limite de f à gauche en 0.

Exercice 3 :

À l'aide des équivalents classiques et/ou des développements limités calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x\tan(x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\ln(1+x^2) - x\sin(x)}$.
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x \times \ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\mathrm{e}^{x-3} - \sqrt{x-2}}{x^3 - 3^x}$.

Exercice 4 :

1. Démontrer que la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = x\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ des asymptotes dont on donnera une équation cartésienne.
2. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \mathrm{e}^x$ admet-elle des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 5 :

On considère la fonction $f(x) = (3x^2+2x)\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que, pour $x > 0$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   On pourra poser $h = \dfrac{1}{x}$ et utiliser des développements limités en 0.
2. Prouver que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$; on précisera l'équation réduite de cette asymptote ainsi que sa position par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Continuité, dérivabilité

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 2.

On note $\tilde{f}$ le prolongement de f à $]1;+\infty[$.

2. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable sur $]1;+\infty[$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$?

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1;1] \\ 2x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. a) Écrire un programme Python qui, lorsqu'on l'exécute, affiche la courbe représentative de la fonction f sur le segment $[-1;2]$.
   b) Quelles conjectures pouvez-vous émettre quant à la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition ?
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Démontrer que f est dérivable à droite en 1 mais pas à gauche.

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. On peut commencer par remarquer que pour tout réel x, $3x^2+1>0$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{3x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   De plus $\sqrt{3x^2+1}-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$. La fonction f est donc définie sur $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

   On peut aussi remarquer que la fonction f est paire : son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, $f(-x)=f(x)$. Ainsi, il suffit d'étudier les limites en 1 et en $+\infty$ car l'étude en -1 et $-\infty$ sera identique.

   Étude en $+\infty$: Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   On sait que $x^2-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

   De plus, pour $x>1$, $\sqrt{3x^2+1}-2=x\left(\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}=3$.

   On en déduit que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{3x}=\dfrac{x}{3}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$.

   Il est aussi possible de rédiger ce calcul de limite sans passer par les équivalents.

   Étude en 1 : Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée. Transformons l'écriture de f :

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}&=\frac{(x^2-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)}\\ &=\frac{(x^2-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{3x^2-3}=\frac{\sqrt{3x^2+1}+2}{3}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+2}{3}=\dfrac{4}{3}$.

2. Distinguons le calcul de la limite à gauche et la limite à droite.

   On a tout d'abord aisément, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}0=0$.

   Pour $x>1$, les opérations classiques sur les limites ne nous permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée. Transformons l'écriture de f et posons $h=\ln(x)$. Pour $x>1$ (c'est-à-dire $h>0$) :

$$f(x)=x^{\ln(\ln(x))}=\mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\times\ln(x)}=\mathrm{e}^{\ln(h)\times h}.$$

   Or, on sait que $\lim\limits_{h\to0^+}h\ln(h)=0$. Donc, par composition de limites, $\lim\limits_{h\to0^+}\mathrm{e}^{\ln(h)\times h}=1$ et ainsi $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$.

   f admet donc des limites finies à gauche et à droite mais ces limites ne sont pas identiques donc f n'admet pas de limite en 1.

3. Pour ces deux fonctions les opérations classiques sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence de formes indéterminées.

   Pour $x>0$, on a :

$$f_1(x)=\frac{\ln(x)-x^2+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+x^4-2\ln(x)}=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\times\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}}{1+\frac{x^4}{\mathrm{e}^x}-\frac{2\ln(x)}{\mathrm{e}^x}}.$$

   Sous cette forme, grâce aux règles des croissances comparées et aux opérations classiques sur les limites on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=0\times\dfrac{-1}{1}=0$.

   Pour $x>0$, on a :

$$f_2(x)=\frac{x^2+\mathrm{e}^{4x}-(\ln(x))^4}{\mathrm{e}^{-2x}+x^2-\mathrm{e}^{3x}}=\frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{3x}}\times\frac{\frac{x^2}{\mathrm{e}^{4x}}+1-\frac{(\ln(x))^4}{\mathrm{e}^{4x}}}{\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{3x}}+\frac{x^2}{\mathrm{e}^{3x}}-1}=\mathrm{e}^x\times\frac{\frac{x^2}{\mathrm{e}^{4x}}+1-\frac{(\ln(x))^4}{\mathrm{e}^{4x}}}{\mathrm{e}^{-5x}+\frac{x^2}{\mathrm{e}^{3x}}-1}.$$

   Sous cette forme, grâce aux règles des croissances comparées et aux opérations classiques sur les limites on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)=-\infty$.

   (*On évitera d'écrire* $+\infty\times\dfrac{1}{-1}$.)

Correction de l'exercice 2 :

1. a) Lorsque $x>1$, on a $0<\dfrac{1}{x}<1$ (décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$) et donc $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$. Ainsi, pour $x>1$, $f(x)=0$.

   On a donc aisément, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

   b) On reprend un raisonnement semblable : pour $x<-1$, $-1<\dfrac{1}{x}<0$ (décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$) et donc $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=-1$. Ainsi, pour $x<-1$, $f(x)=-x$.

   On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

2. a) On sait que pour tout réel h, $h-1<\lfloor h\rfloor\leqslant h$, donc pour $x\in]0;1[$, $\dfrac{1}{x}-1<\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\dfrac{1}{x}$.

   En multipliant cet encadrement par x qui est strictement positif, on obtient $1-x<f(x)\leqslant1$.

b) On peut remarquer que $\lim_{x\to 0^+} 1-x = 1 = \lim_{x\to 0^+} 1$. Donc, par encadrement de limites, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

c) Pour $x \in]-1;0[$, on a toujours $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$. Mais cette fois-ci on multiplie l'encadrement par x qui est strictement négatif pour obtenir $1 \leqslant f(x) < 1-x$. On a, de même que dans la question précédente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   On sait que $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc par produit et quotient d'équivalents
   $$\frac{1-\cos(x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x\times x} = \frac{1}{2}.$$
   En conclusion $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\tan(x)} = \frac{1}{2}$.

2. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.
   On sait que $1-\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} -x$, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $x^2+x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, donc par produit et quotient d'équivalents
   $$\frac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x\times x}{x^2} = -1.$$
   En conclusion, $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3} = -1$.

3. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.
   Il n'est pas possible de s'en sortir uniquement avec des équivalents car cela nous obligerait à sommer des équivalents pour le dénominateur ce qui est interdit.

   Utilisons les développements limités. On sait que $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

   On peut donc écrire $\ln(1+x^2) - x\sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

   Ainsi $\frac{x^3}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{-x^4/3} = -\frac{3}{x}$.

   En conclusion $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)} = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)} = +\infty$.

4. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$. On a alors :
   $$(\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}} = \exp\left(\frac{1}{2h}\ln\left(\sin\left(h+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2h}\ln\left(\cos\left(h\right)\right)\right)$$
   Comme $\cos(h) \to 1$ lorsque $h \to 0$, et que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$, on a $\ln(\cos(h)) \underset{h\to 0}{\sim} \cos(h) - 1$.

   Ainsi $\frac{1}{2h}\ln(\cos(h)) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2h} \times \left(-\frac{h^2}{2}\right) = -\frac{h}{4}$.

   En conclusion, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}} = \exp(0) = 1$.

5. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   On a $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+1/x)$, donc $\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}$.

   Par conséquent $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$.
   Or on sait que $\ln u \underset{u\to 1}{\sim} u-1$ donc
   $$\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}.$$
   On a donc $\ln x \times \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et par conséquent $\lim_{x\to +\infty} \ln x \times \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = 0$.

6. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   Nous allons travailler séparément sur le numérateur et le dénominateur afin de déterminer un équivalent simple de chacun. Pour déterminer ces équivalents simples nous avons besoin d'utiliser les DL et nous nous ramenons à une variable qui tend vers 0 en posant $h=x-3$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x-3}-\sqrt{x-2} &= \mathrm{e}^h-\sqrt{1+h}\\
&= 1+h+o(h)-\left(1+\frac{h}{2}+o(h)\right)\\
&= \frac{h}{2}+o(h)\\
x^3-3^x &= (3+h)^3-3^3\mathrm{e}^{h\ln(3)}\\
&= 3^3\left(1+\frac{h}{3}\right)^3-3^3(1+h\ln(3)+o(h))\\
&= 3^3\left(1+h+o(h)\right)-3^3(1+h\ln(3)+o(h))\\
&= 3^3(1-\ln(3))h+o(h)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{\mathrm{e}^{x-3}-\sqrt{x-2}}{x^3-3^x}\underset{x\to 3}{\sim}\dfrac{\frac{x+3}{2}}{3^3(1-\ln(3))(x+3)}=\dfrac{1}{54(1-\ln(3))}$.

En conclusion $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\mathrm{e}^{x-3}-\sqrt{x-2}}{x^3-3^x}=\frac{1}{54(1-\ln(3))}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Déterminons tout d'abord la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$.

   On détecte une forme indéterminée dans l'exponentielle mais on peut rapidement remarquer que :

   $$\frac{x-1}{x+1}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\frac{x}{x}=1,$$

   donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\mathrm{e}^1$.

   Ainsi, par opération sur les limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

   Regardons maintenant la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Comme $\dfrac{g(x)}{x}=\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, d'après l'étude ci-dessus on a $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\mathrm{e}$.

   Déterminons alors la limite de $g(x)-\mathrm{e}x$ en $+\infty$ et $-\infty$.

   On a $g(x)-\mathrm{e}x=x\left(\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)-\mathrm{e}\right)$. Les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   On transforme alors un peu notre écriture :

   $$\begin{aligned}
   g(x)-\mathrm{e}x &= x\mathrm{e}\left(\exp\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)-1\right)\\
   &= x\mathrm{e}\left(\exp\left(\frac{-2}{x+1}\right)-1\right)\\
   &\underset{x\to\pm\infty}{\sim} x\mathrm{e}\times\left(-\frac{2}{x+1}\right)\quad\text{car }\frac{-2}{x+1}\to 0\\
   &\underset{x\to\pm\infty}{\sim} x\mathrm{e}\times\left(-\frac{2}{x}\right)=-2\mathrm{e}
   \end{aligned}$$

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}g(x)-\mathrm{e}x=-2\mathrm{e}$.

   La droite d'équation $y=\mathrm{e}x-2\mathrm{e}$ est donc asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2. Par opérations sur les limites, on peut tout d'abord remarquer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$.

   On peut donc d'ors et déjà conclure que la droite d'équation $y=-\dfrac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

   En $+\infty$, on doit s'intéresser à la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.

   On a $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan(x)}{x}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. Par opérations sur les limites et d'après les règles des croissances comparées, on peut donc dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

   Ainsi, la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 :

1. On utilise l'indication donnée. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{3}{h^2}+\frac{2}{h}\right)\ln\left(\frac{1/h}{1/h+1}\right)\\
&= \left(\frac{3}{h^2}+\frac{2}{h}\right)\times(-\ln(1+h))\\
&= -\left(\frac{3}{h^2}+\frac{2}{h}\right)\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+o(h^4)\right)\\
&= -\left[\frac{3}{h}-\frac{3}{2}+h-\frac{3}{4}h^2+o(h^2)+2-h+\frac{2}{3}h^2-\frac{1}{2}h^3+o(h^3)\right]\\
&= -\frac{3}{h}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}h^2+o(h^2)\\
&= -3x-\frac{1}{2}+\frac{1}{12x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

2. Grâce à la question précédente, sans calculs supplémentaires, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-3x-\frac{1}{2}\right)=0$, ce qui signifie que la droite d'équation $y=-3x-\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

   De plus, $f(x)-\left(-3x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)>0$ pour x assez grand.

   Ainsi, la courbe représentative de f est située au dessus de son asymptote.

Correction de l'exercice 6 :

1. Pour répondre à cette question il nous faut prouver que f admet une limite finie en 2. Les opérations sur les limites ne nous permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

   On remarque alors que $f(x)=\frac{\ln(1+x-2)}{x-2}\underset{x\to2}{\sim}\frac{x-2}{x-2}=1$, car $x-2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 2 et $\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u$.

   On a donc $\lim x\to 2 f(x)=1$.

   f est prolongeable par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2)=1$.

2. Sur $]1;2[$ et $]2;+\infty[$, $\tilde{f}=f$ donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ces deux intervalles comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Regardons ce qui se passe en 2. Pour $x\neq2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(2)}{x-2} &= \frac{1}{x-2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}-1\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{\ln(1+h)}{h}-1\right) \quad \text{je pose } h=x-2\\
&= \frac{1}{h^2}(\ln(1+h)-h)=\frac{1}{h^2}\left(-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\\
&\underset{h\to0}{\sim} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{x\to2}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(2)}{x-2}=-\frac{1}{2}$ ce qui signifie que $\tilde{f}$ est dérivable en 2 et $\tilde{f}'(2)=-\frac{1}{2}$.

$\tilde{f}$ est donc dérivable sur $]1;+\infty[$. Pour savoir si cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ il nous reste à déterminer si $\tilde{f}'$ est continue en 2.

Pour $x\neq2$, $\tilde{f}'(x)=f'(x)=\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{\ln(x-1)}{(x-2)^2}$.

Les opérations sur les limites ne nous permettent pas de trouver la limite de cette quantité lorsque x tend vers 2 car on est en présence d'une forme indéterminée.

De même que pour la dérivabilité effectuons le changement de variable $h=x-2$ et utilisons les développements limités pour trouver la limite de $\tilde{f}'$ en 2 si elle existe. Pour $x\neq2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(x) &= \frac{1}{h(h+1)}-\frac{\ln(h+1)}{h^2}\\
&= \frac{1}{h}(1-h+h^2+o(h^2))-\frac{1}{h^2}\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\right)\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}h+o(h)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\tilde{f}'(x)\underset{x\to2}{\sim}-\frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to2}\tilde{f}'(x)=-\frac{1}{2}=\tilde{f}'(2)$.

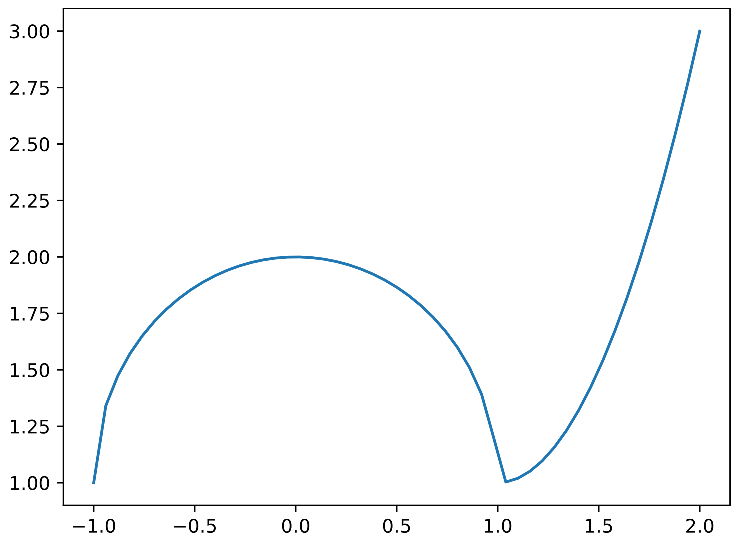
Ainsi $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$.

Correction de l'exercice 7 :

1. a)
```
import matplotlib.pyplot as mp
from math import sqrt

def f(x):
    if -1<=x<=1:
        return 1+sqrt(1-x**2)
    elif x>1:
        return 2*x**2-4*x+3

X=[-1+3*k/50 for k in range(51)]
     #crée une subdivision de [-1;2] avec 51 points
Y=[f(x) for x in X]
mp.plot(X,Y)
mp.show()
```



   b) La courbe obtenue nous laisse penser que f est continue sur $[-1;+\infty[$ mais que f n'est pas dérivable en -1 et 1.

2. La fonction $x\mapsto 1-x^2$ est continue sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, et la fonction $t\mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0;1]$ donc par composition et somme, la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1;1]$.
   La fonction polynômiale $x\mapsto 2x^2-4x+3$ est continue sur $]1;+\infty[$.
   Ces deux points prouvent que f est continue sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1+\sqrt{1-1^2}=f(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2\times 1^2-4\times 1+3=1$.
   Donc f est continue en 1.
   En conclusion, f est continue sur $[-1;+\infty[$.

3. Pour $x>1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{2x^2-4x+3-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)^2}{x-1}=2(x-1)$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$, ce qui prouve que f est dérivable à droite en 1.
   Pour $x\in[-1;1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}-1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}}$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}}=-\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable à droite en 1.