Correction du devoir maison n° 0

Problème A

1. La suite (v_n) est géométrique de raison q et de premier terme v_0. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$.

   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$.

   On a donc extinction si, et seulement si, $0 < q < 1$.

2. a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par, $f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)$ vérifie bien que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   La fonction f étant polynômiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

   $$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right) - \frac{1}{2S}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{S}x.$$

   Un polynôme étant équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$, on a $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2S}x^2$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$3S/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$9S/8$	$\searrow$	$-\infty$

   b)

```
S = 30
v0 = 5
L=[v0]
N=[0]
v=v0
for k in range(1,20):
    v=v+1/2*v*(S-v)/S
    L.append(v)
    N.append(k)

plt.plot(N,L,'o')
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()
```

   c) `import matplotlib.pyplot as plt`

   d) On remarque que selon la valeur de v_0 les variations de la suite ne sont pas les mêmes.

   Pour $v_0 > 30$, la suite semble strictement décroissante, pour $v_0 < 30$ la suite semble strictement croissante et pour $v_0 = 30$, la suite semble constante.

   Dans tous les cas, la suite semble converger vers 30.

e) On suppose donc $v_0 \in]0;S]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $0 < v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant S$ ».

- On sait que $v_1 = f(v_0)$. Comme $v_0 \in]0;S]$, on a $\dfrac{1}{S}v_0\left(\dfrac{S-v_0}{S}\right) \leqslant 0$ et donc $v_1 > 0$.

  De plus, $v_1 - v_0 = \dfrac{1}{2}v_0\left(\dfrac{S-v_0}{S}\right)$, donc, de même que précédemment, $v_1 - v_0 \geqslant 0$.

  Et enfin, on a $v_0 \leqslant S$ et f est croissante sur $[0;S] \subset \left[0;\dfrac{3S}{2}\right]$ donc $f(v_0) \leqslant f(S)$, c'est-à-dire $v_1 \leqslant S$.

  On a donc bien $0 < v_0 \leqslant v_1 \leqslant 2$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  f étant strictement croissante sur $[0;S]$, on a

$$0 < v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant S \Longrightarrow f(0) < f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(S) \Longleftrightarrow 0 < v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant S.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant S$.
La suite (v_n) est donc croissante et majorée par S.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie, grâce aux propriétés d'encadrement de limites, $\ell \in [v_0;S]$.
De plus, en passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$ (en utilisant la continuité de f), on a $\ell = f(\ell)$. Or,

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\ell\left(\frac{S-\ell}{S}\right) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = S.$$

Comme $v_0 > 0$, la seule possibilité est $\ell = S$.
La suite (v_n) converge donc vers S (comme prédit !).

3. a) Dans cette question f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{2}x\left(\dfrac{S-x}{S}\right)\left(\dfrac{x-A}{S}\right)$.

b) Pour $x \in [0;S]$, on a $f(x) - x = \dfrac{1}{2}x\left(\dfrac{S-x}{S}\right)\left(\dfrac{x-A}{S}\right)$.

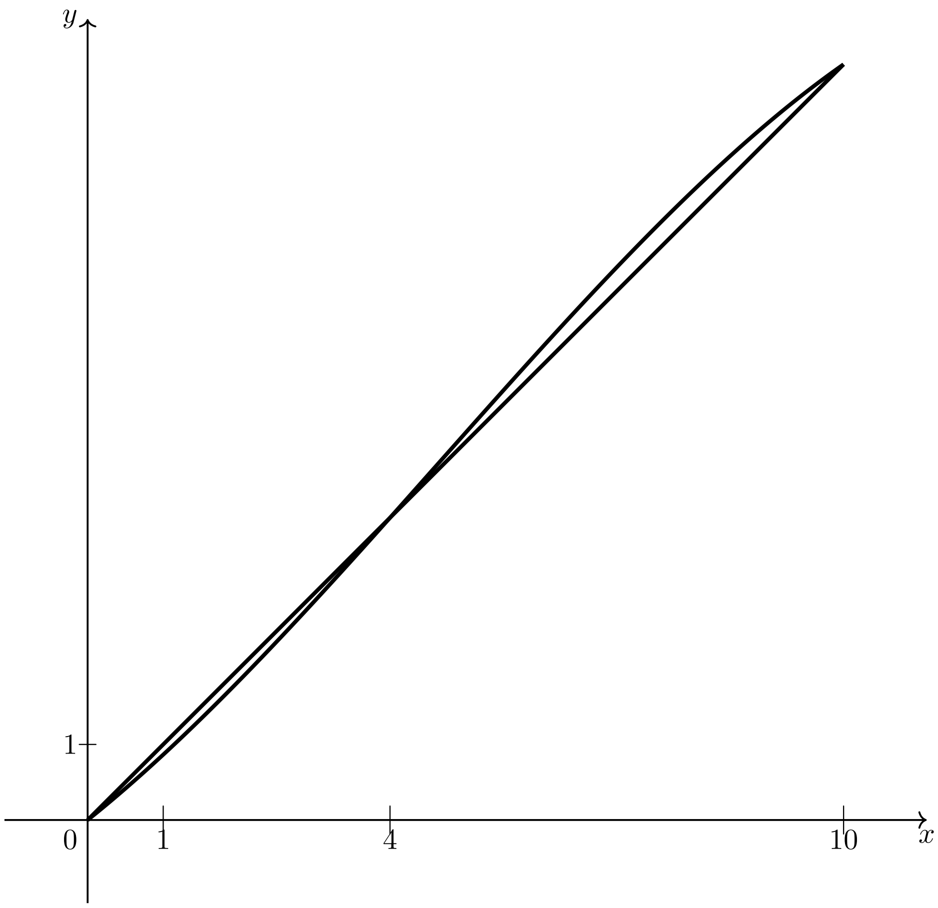
Or $\dfrac{1}{2}x \geqslant 0$, $\dfrac{S-x}{S} \geqslant 0$ et $S > 0$, donc $f(x) - x$ est du signe de $x - A$.
En résumé, pour $x \in [0;A]$, $f(x) - x \leqslant 0$ et pour $x \in [A;S]$, $f(x) - x \geqslant 0$.

c) f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on sait qu'une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right) - \frac{1}{2S}x\left(\frac{x-A}{S}\right) + \frac{1}{2S}x\left(\frac{S-x}{S}\right).$$

Un équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donc $y = \left(1 - \dfrac{A}{2S}\right)x$ et une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse S est donc $y = \left(1 - \dfrac{S-A}{2S}\right)(x-S) + S$.

d)



e) Cette fois il semble que :

— Pour $0 < v_0 < A$, la suite (v_n) est décroissante et converge vers 0.

— Pour $v_0 = A$, la suite (v_n) est constante.

— Pour $A < v_0 < S$, la suite (v_n) est croissante et converge vers S.

f) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $0 < v_n < A$ ».

- D'après l'énoncé $v_0 \in]0; A[$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  f étant strictement croissante sur $[0; A]$, on a

$$0 < v_n < A \Longrightarrow f(0) < f(v_n) < f(A) \Longleftrightarrow 0 < v_{n+1} < A,$$

  car $f(0) = 0$ et $f(A) = A$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < A$.

Avec une nouvelle récurrence, on démontre que (v_n) est décroissante.

On sait que $v_1 = f(v_0)$. Comme $v_0 \in]0; A[$, on a $\frac{1}{2}v_0 > 0, \left(\frac{S - v_0}{S}\right) > 0$ et $\frac{v_0 - A}{S} < 0$.

Donc $\frac{1}{2}v_0 \left(\frac{S - v_0}{S}\right)\left(\frac{v_0 - A}{S}\right) < 0$ et ainsi $v_1 < v_0$.

Cela montre que la propriété $v_{n+1} \leqslant v_n$ est vraie pour $n = 0$.

Ensuite, l'implication $v_{n+1} \leqslant v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$, vraie car f est croissante sur $[0; A]$, montre l'hérédité de notre récurrence.

La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie, grâce aux propriétés d'encadrement de limites, $\ell \in [0; v_0]$.

De plus, en passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$ (en utilisant la continuité de f), on a $\ell = f(\ell)$. Or,

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\ell\left(\frac{S-\ell}{S}\right)\left(\frac{\ell-A}{S}\right) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = A \text{ ou } \ell = S.$$

Comme $v_0 < A$, la seule possibilité est $\ell = 0$.

La suite (v_n) converge donc vers 0 (comme prédit !).

g) Dans le cas où $v_0 \in]A : S[$, on montre par une première récurrence que $v_n \in]A; S[$ puis on remarque que $v_1 > v_0$ donc on montre ensuite par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

La suite étant croissante et majorée elle converge et par un raisonnement analogue aux questions 2.e) et 3.f), on montre qu'elle converge vers S.

Si $v_0 = A$, comme $f(A) = A$, la suite est constante égale à A.

h) S est la quantité maximale de population. C'est la population atteinte s'il y a survie. A est la population initiale minimale pour avoir survie : en dessous il y a extinction.

4. a) On remarque que $y'(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0$ ou $y(t) = S$ ou $y(t) = A$.

Les points d'équilibres sont dont 0, A et S.

b) F est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right) - \frac{1}{2S}x\left(\frac{x-A}{S}\right) + \frac{1}{2S}x\left(\frac{S-x}{S}\right).$$

On a donc $F'(0) = -\dfrac{A}{2S} < 0$, $F'(A) = \dfrac{A}{2S} \times \dfrac{S-A}{S} > 0$ et $F'(S) = -\dfrac{S-A}{2S} < 0$.

A est un point d'équilibre instable et 0 et S sont des points d'équilibre stables.

c) On a ici une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, on peut donc donner, sans se lancer dans de grandes explications, les solutions de l'équation différentielle.

Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{F'(x_0)t} + x_0$ où C est un réel déterminé par la condition initiale.

On peut être encore plus précis en remarquant que $C = y(0) - x_0$.

d) On peut remarquer que le signe de $F'(x_0)$ a une influence sur les variations et la limite en $+\infty$ de la fonction déterminée ci-dessus.

Lorsque $F'(x_0) < 0$, $y(t)$ tend vers x_0 mais pas lorsque $F'(x_0) > 0$, $y(t)$ « s'éloigne » de x_0.

Donc lorsqu'on « s'écarte » légèrement d'un point d'équilibre stable on va y revenir alors que lorsqu'on « s'écarte » d'un point d'équilibre instable, on s'en éloigne de plus en plus.

Cela est cohérent avec le vocabulaire « stable » et « instable ».

Problème B

Partie A : Étude théorique

1. Dans ce cas on a $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} q = q \times Z_n$.

   Z_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme $Z_0 = 1$ donc $Z_n = q^n$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $Z_n(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_n = 1) = p^n$ ».

   - On a $Z_1 = X_{0,1}$ et $X_{0,1}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
     Donc $Z_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_1 = 1) = p$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Si $Z_n = 0$, alors il n'y a pas d'individu à la génération n et donc pas non plus à la génération $n+1$.
Si $Z_n = 1$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1}$ et donc Z_{n+1} vaut 0 ou 1.
On a donc bien $Z_{n+1}(\Omega) = \{0; 1\}$.
De plus, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Z_n = 0], [Z_n = 1])$ on a
$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P(Z_n = 0)P_{[Z_n=0]}(Z_{n+1} = 1) + P(Z_n = 1)P_{[Z_n=1]}(Z_{n+1} = 1) \\ &= 0 + p^n \times P_{[Z_n=1]}(X_{n,1} = 1) \\ &= p^n \times p = p^{n+1}. \end{aligned}$$
On a bien montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_n = 1) = p^n$.
Comme $p \in]0; 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - p^n = 1$.

3. S'il n'y a pas d'individus à la génération n alors obligatoirement il n'y en aura pas à la génération $n+1$. On a donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$.
Par propriété de la probabilité, on a donc $P(Z_n = 0) \leqslant P(Z_{n+1} = 0)$ c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc bien croissante et comme elle est majorée par 1 (c'est une probabilité !), d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge.
4. L'énoncé signifie que $X_{n,i}(\Omega) = \{0; 2\}$, $P(X_{n,i} = 2) = p$ et $P(X_{n,i} = 0) = 1 - p$.
   a) On a $Z_1 = X_{0,1}$ donc $Z_1(\Omega) = \{0; 2\}$, $P(Z_1 = 2) = p$ et $P(Z_1 = 0) = 1 - p$.
   Avec nos formules du cours :
$$\begin{aligned} E(Z_1) &= 0 \times P(Z_1 = 0) + 2 \times P(Z_1 = 2) = 2p \\ E(Z_1^2) &= 0^2 \times P(Z_1 = 0) + 2^2 \times P(Z_1 = 2) = 4p \\ V(Z_1) &= E(Z_1^2) - E(Z_1)^2 && \text{Kœnig-Huygens} \\ &= 4p - 4p^2 = 4p(1-p). \end{aligned}$$
   b) D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le systèmes complet d'événements $([Z_1 = 0], [Z_1 = 2])$ on a :
$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 0) &= P(Z_1 = 0)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + P(Z_1 = 2)P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) \\ &= pP_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + (1-p)P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0). \end{aligned}$$
   c) Calculer la probabilité que la population soit éteinte à la génération $n+1$ sachant que la génération 1 comporte 2 individus revient exactement au même que de considérer chacun de ces 2 individus comme la génération 0 de deux expériences indépendants et de calculer la probabilité que la génération n issue de chacun de ces individus ne comporte plus d'individu.
   Le deux expériences étant indépendantes on peut appliquer le principe multiplicatif et donc $P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$.
   En remarquant alors que $P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) = 1$, on obtient bien
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2.$$
   d) Notons ℓ la limite de la suite (u_n). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p)+pu_n^2 = (1-p)+p\ell^2$.
   Par unicité de la limite on a donc $\ell = (1-p) + p\ell^2 \Leftrightarrow p\ell^2 - \ell + 1 - p = 0$.
   On remarque alors que 1 et $\dfrac{1-p}{p}$ sont bien solutions de cette équation et ce sont les deux seules solutions car il s'agit d'une équation polynômiale de degré 2 qui admet donc au plus 2 solutions.
   Ainsi $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{1-p}{p}$.

e) Si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $1-p \geqslant \dfrac{1}{2} \geqslant p$ donc $\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1$.

Or, comme pour tout n, $u_n \in [0;1]$ on a forcément $\ell \in [0;1]$ et donc (u_n) ne peut pas converger vers $\dfrac{1-p}{p}$.

Ainsi, (u_n) converge vers 1.

f) Lorsque $p > \dfrac{1}{2}$ on a $1-p < \dfrac{1}{2} < p$ et donc $\dfrac{1-p}{p} < 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$ ».

- On a $u_0 = 0$ car $Z_0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est bien vérifiée (car $1-p$ et p sont strictement positifs).
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

  On a alors, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $u_n^2 \leqslant \dfrac{(1-p)^2}{p^2}$ et donc $(1-p)+pu_n^2 \leqslant 1-p+\dfrac{(1-p)^2}{p}$.

  Or $1-p+\dfrac{(1-p)^2}{p} = (1-p)\left(1+\dfrac{1-p}{p}\right) = (1-p) \times \dfrac{1}{p}$.

  Donc on a bien $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1-p}{p}$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

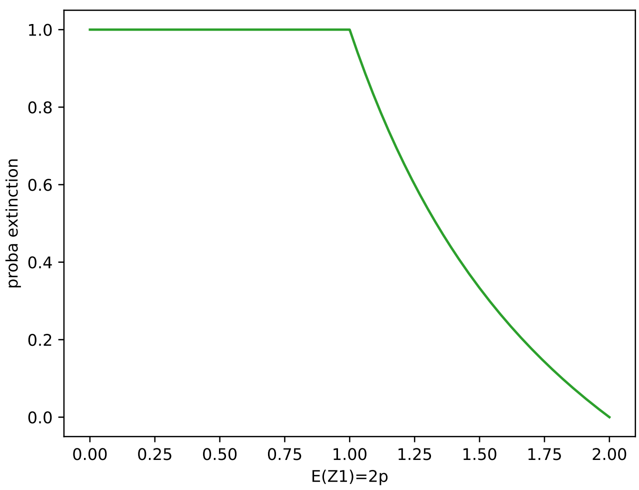
Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$.

Cela nous permet alors d'affirmer que $\ell \in \left[0; \dfrac{1-p}{p}\right]$ et donc $\ell = \dfrac{1-p}{p}$.

La probabilité d'extinction vaut donc $\dfrac{1-p}{p}$.

g) On rappelle que $E(Z_1) = 2p$. On doit donc tracer la fonction suivante

$$2p \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < 2p \leqslant 1 \\ \dfrac{1-p}{p} & \text{si } 1 < 2p < 2. \end{cases}$$



Il y a extinction presque-sûre si l'espérance d'un nombre de descendants est inférieure ou égale à 1, puis cette probabilité d'extinction décroit vers 0.

Partie B : Simulations informatique

5. a) p correspond au paramètre p de la question 4., c'est-à-dire la probabilité qu'un individu ait deux descendants, $1-p$ étant la probabilité qu'il n'ait pas de descendant.

   n correspond au numéro de la génération pour laquelle on souhaite arrêter la simulation.

   b) La ligne 2 créé une matrice unidimensionnelle contenant $n+1$ zéros. Cette matrice est vouée à contenir le nombre d'individus des générations 0 à n.

   Les lignes 12 et 13 permettent d'arrêter la simulation dès qu'une génération contient 0 individus. Toutes les générations suivantes auront 0 individus donc il n'est plus nécessaire de continuer la simulation.

   Les lignes 6 à 10 permettent de passer en revue chaque individu de la génération $i-1$, de simuler s'il a 2 descendants ou 0 et de compter au final le nombre de descendants de la génération $i-1$, soit le nombre d'individus de la génération i, que l'on stocke dans l'élément d'indice i de la matrice `population`.

   c) `population[i]` doit être égal au nombre d'individu de la génération i, soit la valeur de Z_i (en reprenant les notations de la partie A.). Or $Z_i = \sum_{j=1}^{Z_{i-1}} X_{i-1,j}$ et on peut remarquer que l'on peut écrire $X_{n,j} = 2Y_{n,j}$ avec $Y_{n,j}$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

   Or les variables $Y_{n,j}$ sont indépendantes donc $\sum_{j=1}^{Z_{i-1}} Y_{i-1,j}$ suit une loi binomiale de paramètres Z_{i-1} (la variable `Z` de notre programme) et p.

   Cela explique que l'on puisse remplacer les ligne 7 à 9 par la ligne proposée.

6. On a vu dans la partie A. que lorsque $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ il y a presque sûrement extinction alors que pour $p > \dfrac{1}{2}$ l'extinction n'est pas presque sûre.

   On peut penser que le graphique de gauche correspond à $p = 0,6$ (où il n'y a pas toujours extinction) et le graphique de droite (où il y a toujours extinction) correspond à $p = 0,4$.

7. **Question facultative**

   a) Il suffit ici de modifier les lignes 13 et 14 :

```
12         if descendants == 0:
13             return 1
14     return 0
```

   b) Le principe général est d'approcher la probabilité d'extinction par la fréquence de réalisation de l'événément « la lignée s'est éteinte au cours des 60 première générations » sur 5000 expériences.

```
def extinction(p):
    proba=0
    for _ in range(5000):
        proba+=galton_watson_2(p,60)
    return proba/5000
```

   c) On retrouve ici un graphique proche de celui obtenu à la question 4 avec un plateau pour $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$ et une décroissance jusqu'à 0 ensuite.