

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce TD, les notations pour les fonctions inconnues et les variables peuvent changer d'un exercice à l'autre.

Équations linéaires

Exercice 1 (Premier ordre linéaire).

Résoudre les équations suivantes, on donne une indication pour trouver la solution particulière :

- $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$ *indication* $y_p : t \mapsto a \cos(2x) + b \sin(2x)$
- $y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2}$ *indication* variation de la constante.
- $y'(x) + 2 \tan(x)y(x) = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ *indication* variation de la constante.
- $y' + x^2y = -x^2$ *indication* y_p constante.

Exercice 2 (\blacktriangle).

Résoudre les équations suivantes

- $y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $]1; +\infty[$ *indication* y_p polynomiale
- $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$ sur $]1; +\infty[$ *indication* variation de la constante ou solution simple.

Exercice 3 (Second ordre, homogène).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $x'' - 3x' - x = 0$
- $x'' - 2x' + x = 0$
- $x'' - 2x' + 2x = 0$

Exercice 4 (Second ordre).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$,
- $y'' - 2y' + y = xe^x$, on cherchera une solution particulière sous la forme $P(x)e^x$ où P polynomiale.
- $y'' + y' + y = \cos x$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto a \cos x + b \sin x$.

Exercice 5 (\blacktriangle).

Résoudre $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$, on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax \cos(x)e^x$ en remarquant que $y_{h_0} : x \mapsto \cos(x)e^x$ est une solution de l'équation homogène.

Exercice 6 (Conditions aux bords).

Soit ω un réel strictement positif, a et b sont des réels et on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On cherche à résoudre l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad y(0) = a \quad y(T) = b$$

- Résoudre l'équation homogène sans condition.
- À quelle condition sur a et b l'équation admet elle une solution, cette solution est elle unique?
- On change les conditions initiales par $y(0) = a \quad y(T/2) = b$, quelles sont les solutions?

Équation autonomes

Exercice 7.

Résoudre

- $x'(t) = 1 + x^2(t)$ et $x(0) = x_0$
indication On commencera par diviser par $1 + x^2$ après justification
- Chercher les solutions à valeurs dans $] -1; 1[$ de l'équation $x'(t) = 1 - x^2(t)$ avec $x(0) = x_0$

Exercice 8 (\blacktriangle).

Résoudre

- $x'(t) = e^{x(t)} - 1$, avec $x(0) = x_0$
Poser $z(t) = x(t) + t$,
- $t.x'(t) = x(t) \cdot (1 + \ln(x(t)) - \ln(t))$, avec $x(1) = x_1 > 0$
Poser $z(t) = \ln(x(t)/t)$.

Recollement

Exercice 9 (Recollement détaillé).

- Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
- Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f , est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

- On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$.

- Résoudre l'équation précédente sur \mathbb{R} .

Exercice 10.

On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

- Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

- Sur quel(s) intervalle(s) connaît-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
- Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
- Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 11 (Bonus, \blacktriangle non détaillé).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = \sqrt{1+x^2}$,
- $f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ avec $f(0) = 2$.
- $xf'(x) - f(x) = \ln(x)$,
- $xf'(x) - f(x) = x^3$,
- $x^2f'(x) + xf(x) = 1 + 2x^2$,
- $(1-x^2)f'(x) + xf(x) = 0$,

Pour aller plus loin

Exercice 12 (changement de variable).

On considère les équations différentielles :

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = xe^x. \quad (\mathcal{E})$$

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t) \quad (\mathcal{F})$$

- Résoudre l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .
- Montrer que (\mathcal{E}) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto P(x)e^x$ avec P un polynôme que l'on déterminera. Puis résoudre (\mathcal{E}) .
- Si $t \mapsto f(t)$ est une solution de (\mathcal{F}) , quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $x \mapsto f(e^x)$? En déduire les solutions de (\mathcal{F}) .

Exercice 13 (Changement de fonction inconnue \blacktriangle).

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
- Sur $]0; +\infty[$ résoudre $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z(x) = xy(x)$.

Exercice 14 (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3.).

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

- Soit f une solution à valeurs réelles de (E_1) . On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g .
- Résoudre (E_2) .
- Résoudre (E_1) .

Exercice 15.

On cherche à déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système¹ suivant :

$$\begin{cases} y' - y &= z \\ z' + z &= 3y \end{cases}$$

- On suppose que y et z sont des solutions de ce système, trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par y .
- Résoudre cette équation, puis trouver l'expression de z .
- Compléter ce raisonnement "Analyse-Synthèse" par la partie "synthèse".

Exercice 16 (Autre utilisation de la variation de la constante).

On considère l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* .

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' - 5xy' + 9y = 4x + 9.$$

- Les deux équations doivent être simultanément vérifiées

- Chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^r$ et utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
- Trouver les solutions de (\mathcal{E}) sur $]0; +\infty[$.

Exercice 17 (Équations fonctionnelles \blacktriangle).

résoudre les équations suivantes

- $f'(x) + f(x) = 2f(0)$
- $f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$
- $f'(x) + f(-x) = 0$

Exercice 18.

On considère l'équation différentielle (\mathcal{E}) sur $]-1; +\infty[$:

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - xf(x) = (1+x)^2 e^x$$

- Vérifier que la fonction $f(x) = e^x$ est solution de l'équation homogène associée (\mathcal{E}_0) .
- En déduire toutes les solutions de l'équation (\mathcal{E}_0) . On pourra s'inspirer de 16.
- En déduire l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

Exercice 19 (Forme théorique des solutions).

On s'intéresse à l'équation différentielle autonome

$$y' = F(y)$$

où F est une fonction continue, ne s'annulant pas sur un intervalle I

- Montrer qu'il existe une fonction G une primitive de $\frac{1}{F}$ sur I
- Démontrer que G induit une bijection de I vers un intervalle J que l'on ne cherchera pas à calculer
- Soit λ un réel fixé, on pose

$$y : t \mapsto G^{-1}(t + \lambda)$$

Montrer que y est solution de l'équation différentielle.

- Essayez de démontrer la réciproque.

Attention : ce résultat n'est pas un résultat qu'on utilise en pratique pour résoudre des équations différentielles

