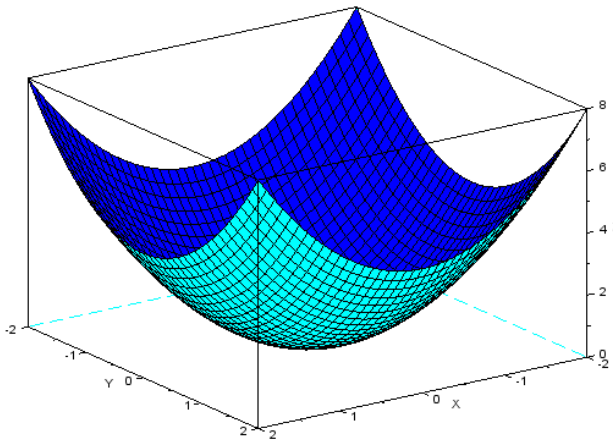
RÉVISIONS : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

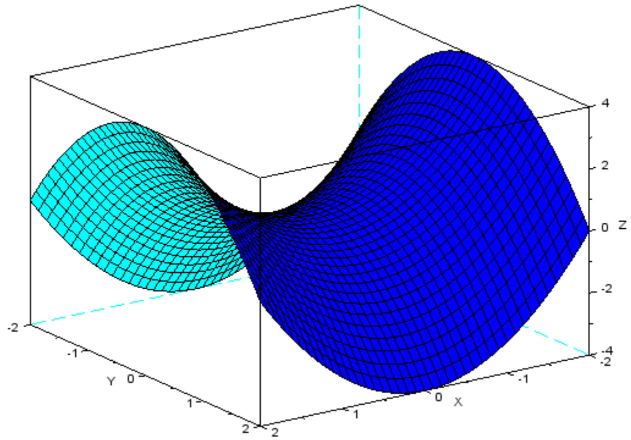
Préliminaires

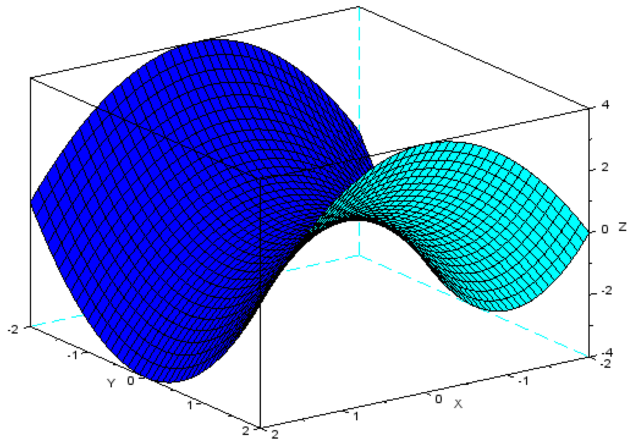
Exercice 1.
Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -x^2 + y^2 \end{array}$$

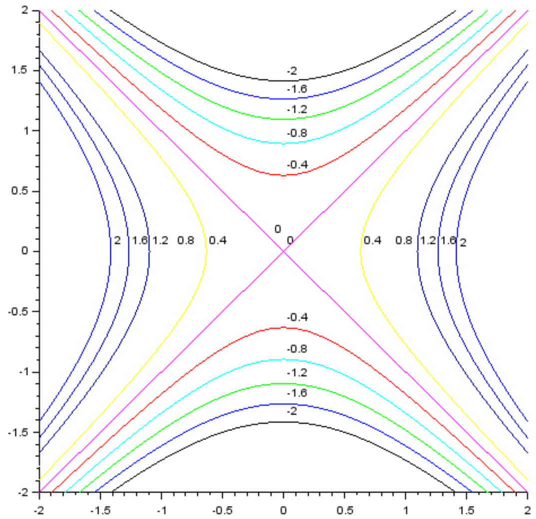


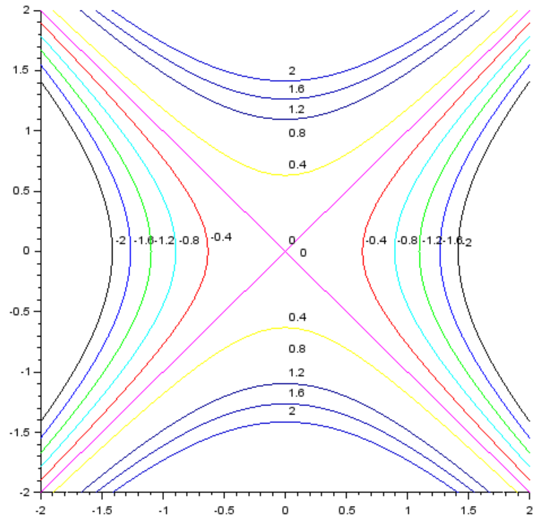


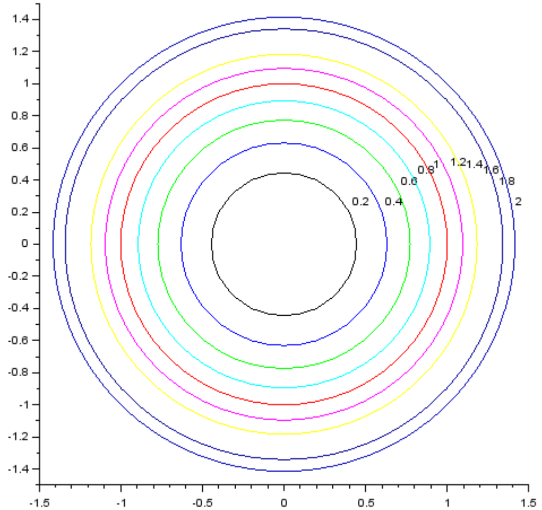


Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.

Exercice 2.
Pour les fonctions de l'exercice précédent nous avons tracé les lignes de niveau. Associer chaque graphe à sa fonction (x est en abscisses et y en ordonnées).





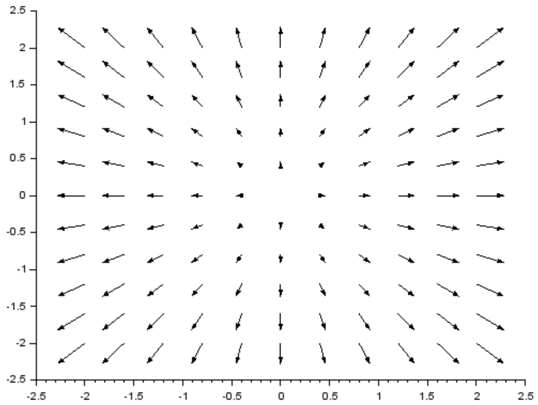


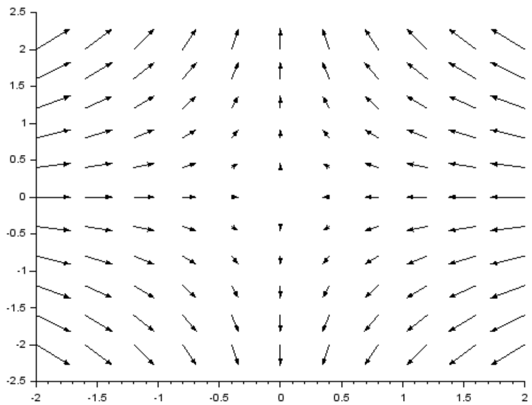
Dérivabilité

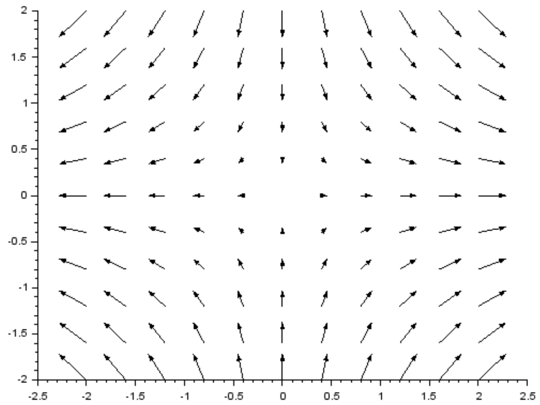
Exercice 3.
Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur un ensemble que l'on déterminera.

1. $(x,\ y) \longmapsto x$.
2. $(x,\ y) \longmapsto y$.
3. $(x,\ y) \longmapsto x + y$.
4. $(x,\ y) \longmapsto x^2 - y^3$.
5. $(x,\ y) \longmapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$.
6. $(x,\ y) \longmapsto \exp\left(x^2 + y^2\right)$.
7. $(x,\ y) \longmapsto \exp\left(\mathrm{e}^x + y\right)$.
8. $(x,\ y) \longmapsto \cos(x)\sin(y)$.
9. $(x,\ y) \longmapsto \cos(x + y)$
10. $(x,\ y) \longmapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in \,]0;\, 1[$.

Exercice 4.
Pour les fonctions de l'exercices 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.







Exercice 5.
Calculer le gradient puis donner l'approximation pur des petites variations en $(1,\ 1)$ et l'équation du plan tangent. des fonctions suivantes

1. $(x,\ y) \mapsto xy$
2. $(x,\ y) \mapsto x^2 + y^2$
3. $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^2 + xy$
4. $(x,\ y) \mapsto x^2y^2 + xy^3$
5. $(x,\ y) \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6. $(x,\ y) \mapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$

Exercice 6.
Reprendre l'exemple précédent en remplaçant $(1,\ 1)$ par $(1,\ -1)$.

Dérivées d'ordre 2

Exercice 7.
Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

Problèmes

Exercice 8.
Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$. Calculer $m = f\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
3. (a) Développer $2(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2y}+2\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{y}$$

   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)\geqslant -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x,y\right)=x\,\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$

1. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A=(-1,0)$.
2.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. (a) Montrer que : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x,y\right)\geqslant x\,\mathrm{e}^{x}$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=x\,\mathrm{e}^{x}$, conclure que le point critique trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.
On pose

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & (1+x+y)^2-(1+x-y)^2\end{array}$$

1. Trouver tous les points critiques de f.
2. tracer le tableau de variations de

$$h:t\mapsto f(-1+t,t)\qquad g:t\mapsto f(-1+t,-t)k:t\mapsto f(-1+t,0)$$

3. Le point $(-1,0)$ est il un extremum de f ?

Exercice 11 (⛰).
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi\left(x\right)=2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall\left(x,y\right)\in\,]0;+\infty[\times]0;+\infty[,\quad f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{x+4y}\ln\left(xy\right)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi\left(x\right)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)$$

Or par croissances comparées

$$\lim_{0^+}x\ln\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

donc par opérations

$\boxed{\lim_{0^+}\varphi=+\infty\text{, la courbe représentative de }\varphi\text{ admet une asymptote verticale}}$

❀

2. Déterminer la limite de $\varphi\left(x\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi\left(x\right)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Cette première limite n'est pas une forme indéterminée

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$$

Une utilisation des croissances comparées montre que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0}$$

La courbe n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$, on peut dire que la courbe admet une *branche parabolique d'axe Ox* (notion hors programme).

❀

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

RÉPONSE:

Par opérations sur des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_=^*$

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour } x \in \mathbb{R}_+^* \ \varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

❀

4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\varphi'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$
On en déduit

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(1/2)$	$\nearrow$	$+\infty$

❀

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

RÉPONSE:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = -4\ln 2 + \frac{1}{2}$$
D'après l'indication cette quantité est négative.
La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, de plus $0 \in \left]\varphi(1/2); +\infty\right[$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un (unique) réel β dans $]1/2; +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$. De même en appliquant le théorème de la bijection sur $]0; 1/2[$ on prouve l'existence de α.

❀

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

RÉPONSE:

```
import numpy as np

def phi(x):
        return np.log(x)
def dicho(f,a,b,eps):
        while b-a>eps:
                c=(a+b)/2
                if f(c)*f(a)<0: #signe contraire
                        b=c
                else:
                        a=c
        return a,b
print(dicho(phi,0.0001,0.5,10**-2))
```

❀

Points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. On montre de la même façon que $(x, y) \leftarrow \exp\left(x + 4y\right)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. Par produit

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]0; +\infty[\times]0; +\infty[.}$$

❀

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Soit (x,y) dans l'ensemble de définition de f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 1 \times \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy) + \varepsilon^{x+4y}\frac{y}{yx} && \text{dérivée produit} \\ &= f(x,y) + \varepsilon^{x+4y}\frac{1}{x} \end{aligned}$$

De même pour la deuxième dérivée première

$$\boxed{\text{Pour } (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}}$$

❀

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

RÉPONSE:

Attention : On ne demande pas de trouver tous les points critiques mais de vérifier que les deux points donnés sont des points critiques.
On remarque que les points $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont dans $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
En utilisant le résultat précédent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ &= \mathrm{e}^{2\alpha}\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} && \text{définition de } f \\ &= \mathrm{e}^{2\alpha}\ln\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ &= \mathrm{e}^{2\alpha}\left(2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2\alpha}\varphi(\alpha) \\ &= 0 && \text{définition de } \alpha \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = 0$$

$$\boxed{\text{les points } \left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) \text{ et } \left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) \text{ sont des points critiques de } f \text{ sur }]0;+\infty[\times]0;+\infty[.}$$

❀

4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Pour (x, y) dans le domaine de définition

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}\right) && \text{question 2, écriture peu rigoureuse} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} && \text{linéarité, dérivée d'un produit} \\
&= f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} && \text{question 2, cette forme n'est pas utile pour la suite}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } (x,y) \in]0;+\infty[^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}}$$

En utilisant l'avant dernière forme obtenue :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + -\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\
&= 0 + -\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} && \text{car } \left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) \text{ point critique}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}}$$

Les autres calculs sont similaires

❀

Exercice 12 (Fonctions homogènes).
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que f est homogène, c'est à dire $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$
   (c) Étudier la réciproque.

Exercice 13 (Fonctions invariantes par translation).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et vérifiant :

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3,\ f(x+t, y+t) = f(x,y).$$

Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 14 (Fonctions harmoniques).
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si pour tout (x, y)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$.Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.