Concepts de bases en probabilités

Généralités

Commandes python

Dans le module `random` que l'on importe avec l'alias `rd`, on trouve

- `rd.random()` renvoie un réel, choisi au hasard et uniformément , dans l'intervalle $[0;1[$.
- `rd.randint(a,b)` renvoie un entier, choisi au hasard et uniformément , dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$.
- `rd.randrange(a,b)` renvoie un entier, choisi au hasard et uniformément , dans l'intervalle $[\![a,b-1]\!]$, les arguments suive la même convention que ceux de la commande `range`.

Exercice 1.
Soient A, B, C trois événements liés à une expérience aléatoire d'univers Ω.
Décrire à l'aide de A, B, C les événements suivants

1. $E_1 =$ « seul A se réalise ».
2. $E_2 =$ « A ne se réalise pas ».
3. $E_3 =$ « B se réalise ou C se réalise ».
4. $E_4 =$ « Soit B se réalise, soit C se réalise mais pas les deux ».
5. $E_5 =$ « A et B se réalisent mais pas C ».
6. $E_6 =$ « Deux événements au plus se réalisent ».
7. $E_7 =$« Deux événements ou plus se réalisent ».

Exercice 2.
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in_N}$ une famille d'événements.
Écrire à l'aide d'union et d'intersection les évènements suivants :

1. « Tous les événements se réalise à partir du rang n_0 »
2. « Tous les événements se réalise à partir d'un certain rang »
3. « Seul un nombre fini d'événements se réalisent ».
   Indication : Une propriété $\mathscr{H}_n$ est est vraie pour un nombre fini de n si et seulement si , elle est fausse à partir d'un certain rang.
4. « Un nombre infini d'événements se réalise »

Exercice 3 ( ).
Soit $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux tribus sur l'univers Ω. Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une tribu.
Est ce le cas de $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$?

Exercice 4 (Formule de Poincaré **).**
Soient $A_1, \ldots, A_n$, n événements
le but de cet exercice est de démontrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$$

1. Écrire sous forme développée le cas $n = 2$
2. Écrire le cas $n = 3$ et le démontrer, faire de même pour $n = 4$.
3. Démontrer le résultat par récurrence sur n. On commencera par remarquer que
$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}$$

Espaces probabilisés finis

Exercice 5.
On pioche successivement et sans remise 4 cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. dans cet ordre 2 trèfles puis 2 cœurs.
2. 2 trèfles et 2 cœurs.

Exercice 6.
On lance 7 fois successives un même dé à 20 faces (que l'on suppose équilibré). Calculer la probabilité pour que :

1. toutes les faces portent un numéro distinct.
2. toutes les faces portent un numéro identique.
3. Écrire des fonctions python qui simule ces expériences. À chaque fois la fonction renvoie `True` si l'événement est réalisé et `False` sinon. Vous ne devez pas utiliser les calculs précédents, mais uniquement la description de l'événement.
4. En utilisant les fonctions précédentes, écrire un programme qui réalise N expériences et qui calcule la fréquence de fois où l'événement décrit a été réalisé.

Exercice 7.
Une Urne U_1 contient 3 boules blanches et 5 boules noires. Une urne U_2 contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire simultanément 2 boules ans l'urne choisie.
Calculer la probabilité d'avoir deux billes de la même couleur

Exercice 8.
Soit un jeu de 32 cartes. on donne 5 cartes (simultanément) à X et à Y

1. Probabilité pour que X ait au moins un as
2. Y a exactement un as dans son jeu, quelle est pour lui la probabilité pour que X ait au moins un as

Exercice 9 (Deuxième chance).
Lors d'un jeu on demande au joueur de choisir parmi 3 enveloppes, dans l'une d'elles, on trouve un lot , les autres sont vides.

Le candidat choisit une enveloppe mais ne l'ouvre pas. Puis l'animateur ouvre une enveloppe vide (qui n'est pas celle qui qu'a choisie le candidat). Il reste donc 2 enveloppes fermées : celle que le candidat a choisi et une autre. Le candidat a alors le choix entre garder son premier choix et changer. Qu'a-t-il intérêt à faire ?

Espaces probabilisés infinis

Exercice 10.
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Quelle est la probabilité que l'on fasse exactement n lancers ?
2. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?
3. Écrire une fonction python simule cette expérience et qui renvoie True si tous les numéros sont pairs False sinon.

Exercice 11.
On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $1/2^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "n est un multiple de k".

1. Vérifier que ceci définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.
4. Montrer que alors A_2 et A_4 ne sont pas indépendants.

Exercice 12.
Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. On note E_n "l'étape n a bien lieu. Donner $P_{E_{n-1}}(E_n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
2. Calculer $P(E_n)$
3. On note S_n l'événement "le jeu s'arrête à l'issue de l'étape n". Que vaut $P(S_1)$?
4. En remarquant que $S_n = E_n \setminus E_{n+1}$,calculer $P(S_n)$
5. en déduire que la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle.
6. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne le jeu (c'est à dire deux manches successives) ?

7. Écrire une fonction python qui simule cette expériences. La fonction renvoie le numéro du joueur qui gagne.

Exercice 13.
On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) n fois de suite. On note p_n la probabilité que les quatre chiffres $(1,2,3,4)$ apparaissent au moins une fois lors des n lancers.
Pour tout nombre entier $i \in \{1;...;4\}$, on pose :

$$A_i = \left\{\text{le numéro } i \text{ n'apparait pas durant les } n \text{ tirages}\right\}$$

1. Calculer $P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_4)$.
2. En déduire que $p_n = 1 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 6\left(\frac{2}{4}\right)^n - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.
4. Écrire une fonctions python qui simule le lancers des n dés et qui renvoie `True` si l'événement "les quatre chiffres $(1,2,3,4)$ apparaissent au moins une fois lors des n lancers" est réalisé et `False` sinon. Vous ne devez pas utiliser les calculs précédents, mais uniquement la description de l'événement.
5. En utilisant les fonctions précédentes, écrire un programme qui réalise N expériences et qui calcule la fréquence de fois où l'événement décrit a été réalisé.

Exercice 14 (Tirages dans une urne bicolore)**.**
Une urne contient a billes noires et b billes blanches. On retire une bille puis on la remet et on recommence cette opération une infinité de fois.
On note B_i, pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'événement « Le lancer i amène une bille blanche ».

1. **Obtention de la première bille Blanche**
   On note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n « le premier tirage qui amêne une bille blanche est n »
   (a) Écrire A_n en fonction des B_i.
   (b) Calculer la probabilité de A_n
2. **Obtention d'une bille blanche**
   On note B l'événement « On obtient au moins une bille blanche »
   (a) Écrire B en fonction des A_n.
   (b) En déduire, rigoureusement, que $P(B) = 1$.
   (c) Comment appelle t'on un tel événement ?
3. **Obtention d'une bille blanche deuxième méthode**
   (a) Écrire $\overline{B}$ en fonction des A_n.
   On admet que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i\right)$$

   (b) En déduire que $P(B) = 1$.
4. **Obtention du premier B à un rang pair**
   On note C « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang pair », D « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang multiple de 3 »et F « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang multiple de 6 »
   (a) Écrire C ,D et F à l'aide des A_n.
   (b) En déduire la probabilité de C, D et F
   (c) Ces trois événements sont ils indépendants ?

Exercice 15 (Urnes de Polya)**.**
Exemple type de tirage successifs dans des urnes modifiées à chaque étape
On dispose d'une urne contenant a billes rouges et b bille blanches. c représente un entier naturel non nul.
On retire une bille de l'urne, on note sa couleur on la remet dans l'urne et on rajoute c billes de la couleur de celle qui à été tirée.

1. Écrire une fonction python dont les arguments sont `a, b, c` et qui renvoie le rang d'apparition de la première boule blanche.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n la probabilité d'obtenir la première bille blanche au rang n. Calculer r_n (utiliser le théorème des probabilités composées, après avoir introduit des événements de "base", et écrit de façon ensembliste l'événement dont on cherche la probabilité).

3. On note, pour $m \in \mathbb{N}^*$, C_m les m premiers tirages sont des billes rouges.
   (a) Cet événement est il le même que celui étudié dans la question précédente ?
   (b) Calculer $P(C_m)$
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln(P(C_n))$ (on écrira $\ln P(C_n)$ sous forme d'une somme et on utilisera les théorème de comparaison sur les séries).
   (d) On admet que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n \subset V_{n+1}$$
   alors
   $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n)$$
   En déduire la probabilité de C « On obtient que des billes noires »
4. Déduire de la question précédente, et sans calculs, que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = 1$

Exercice 16 (Apparition du premier double Pile).
On lance une infinité de fois une pièce non truquée, et on cherche à connaître le rang du premier double Pile.
Par exemple si ls suite de tirage est PFPFFPPPF$\cdots$ le résultat est 6. Si la suite de tirage donne FFFPFFPPFFF$\cdots$ le résultat est 7.
On note A_i l'événement le tirage i donne Pile et r_n la probabilité que lors d'une suite de tirage le rang du premier double Pile soit n

1. Écrire une fonction python `double_pile()` qui simule l'expérience précédent, elle doit renvoyer le rang d'apparition du premier double pile.
2. calculer r_1, r_2.
3. Calculer r_3 (on envisagera les différentes possibilités sur les 2 premiers tirages).
4. En étudiant le premier tirage, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$r_{n+2} = \frac{1}{2}r_{n+1} + \frac{1}{4}r_n$$
5. Peut on calculer la probabilité d'obtenir un double Pile au moins une fois lors de la suite de tirages ? (On ne cherchera pas à calculer l'expression de r_n, mais on "sommera l'égalité précédente)

Exercice 17 (Loi de Hardy-Weinberg).
Un gène présent dans une population est formé de 2 allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa, aa. Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi si le père est du type AA et la mère de type Aa, les enfants peuvent être du type AA ou Aa. On considère une population (génération 0) et on note p_0, q_0 et r_0 les proportions respectives de chacun des phénotypes AA, Aa et aa. On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype AA.
2. Donner de même r_1, puis q_1.
3. Démontrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment uniquement en fonction de $\alpha = p_0 - r_0$. Que peut-on dire de $p_1 - r_1$.
4. Donner les probabilités p_2, q_2 et r_2 qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement AA, Aa et aa. Que peut-on conclure ?

Chaînes de Markov

Exercice 18.
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 19 (déplacement sur un segment).

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1/2$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. Écrire une fonction python qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cette fonction prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et le paramètre p et retourner 0 ou en N en fonction du point d'arrêt, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête.
2. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.
   (a) Que vaut u_0 ? u_N ?
   (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$. On pourra utiliser le SCE G_1, D_1 où D_1 : " le premier déplacement se fait à droite ".
   (c) En déduire l'expression exacte de u_a.
3. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
4. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Autres

Exercice 20.
On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire au hasard successivement et sans remise 5 cartes.

1. Quel Ω choisir ?
2. Calculer les probabilités d'obtenir
   (a) Une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent.
   (b) Un carré (4 cartes de même valeur)
   (c) un Full (trois cartes de même valeurs et deux autres de même valeur)

Exercice 21.
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire 2 boules. Déterminer la proba- bilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, on tire la deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la deuxième boule.

Exercice 22.
On lance un dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?

Exercice 23 (Le problème du chevalier de Méré.)**.**
On jette un dé n fois de suite.

1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir 6 au moins une fois. Numériquement, calculer p_4 .
2. Trouver n tel que $(p)^n \geqslant \dfrac{1}{2}$.