DM 01 fonctions de deux variables

Bio Spé

Réponses

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad f(x, y) = e^{x+4y} \ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Etude des zéros de φ .

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \left(4 \times \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x^2} \right)$$

Comme $\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = 0$, alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

puis comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty, \text{ la courbe représentative de } \varphi \text{ admet une asymptote verticale en } 0.$$

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

La première limite n'est pas une forme indéterminée.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Soit x réel strictement positif

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2}$$

Or d'après le théorème des croissances comparées

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

donc comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$$

On constate que la courbe représentative n'admet pas d'asymptote horizontale (premier calcul), mais pas non plus d'asymptote oblique¹.

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

RÉPONSE:

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

1. On peut parler de branche parabolique d'axe Ox .

$$\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et pour } x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

⊛

4. Dresser le tableau de variation de φ , faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

RÉPONSE:

Soit x réel strictement positif

$$\begin{aligned} \varphi'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} > \frac{1}{x^2} \\ &\Leftrightarrow 2 > \frac{1}{x} && \text{car } x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
φ	$+\infty$	$\varphi(1/2)$	$+\infty$

⊛

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

RÉPONSE:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln(4) + 2 = 2(1 - 2\ln(2))$$

D'après l'indication de l'énoncé cette quantité est strictement négative. φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty[$ et $\varphi(1/2) < 0$ et $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$. D'après le théorème de la bijection monotone il existe un (unique) réel β dans $]\frac{1}{2}; +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

De même la fonction étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 1/2]$, intervalle où elle change de signe, il existe un (unique) réel α dans cet intervalle qui vérifie $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Il existe deux réels positifs } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

⊛

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} . On utilisera le procédé de dichotomie.

RÉPONSE:

```
import numpy as np

def phi(x):
    return 2*np.log(x/2)+1/x

def dichotomie(f,a,b,eps):
    """ on suppose a<b et que f continue changeant de signe """
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
    return a

print(dichotomie(phi,0.0001,1/2,10**-4))
```

⊛

Points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et à valeurs strictement positives. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition la fonction $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. De même la fonction $(x, y) \mapsto \exp(x+4y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Par produit :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0; +\infty[\times]0; +\infty[.$$

⊛

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x , et y strictement positifs

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Soit (x, y) deux réels strictement positifs

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 \times e^{x+4y} \ln(xy) + e^{x+4y} \frac{y}{xy} \\ &= f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4 \times e^{x+4y} \ln(xy) + e^{x+4y} \frac{x}{xy} \\ &= 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{aligned}$$

$$\text{pour } x, \text{ et } y \text{ strictement positifs} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$

⊛

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $(\alpha, \frac{\alpha}{4})$ et $(\beta, \frac{\beta}{4})$ sont des points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}e^{\alpha+\alpha} \\ &= e^{2\alpha} \left(\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{1}{\alpha} \right) && \text{définition de } \varphi \\ &= e^{2\alpha} \left(2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= e^{2\alpha} \phi(\alpha) \\ &= 0 \text{ définition de } \alpha \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= 4f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{4}{\alpha}e^{\alpha+\alpha} \\ &= 4e^{2\alpha} \left(\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{1}{\alpha} \right) && \text{définition de } \varphi \\ &= 4e^{2\alpha} \left(2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= 4e^{2\alpha} \phi(\alpha) \\ &= 0 \text{ définition de } \alpha \end{aligned}$$

$$\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) \text{ est un point critique de } f \text{ sur }]0; +\infty[\times]0; +\infty[.$$

Il me semble pas nécessaire de recommencer le calcul pour β .

⊛

4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et établir que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = 16 \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{4}{\alpha} e^{2\alpha} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = 16 \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{4}{\alpha} e^{2\alpha} \end{array} \right.$$

⊛

RÉPONSE:

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x} e^{x+4y}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) + \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) e^{x+4y} \quad \text{il n'est pas nécessaire de calculer plus en détail}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, \alpha/4) &= \frac{\partial f}{\partial x} f(\alpha, \alpha/4) + \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) e^{\alpha+\alpha} \\ &= 0 + \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \end{aligned}$$

car $(\alpha, \alpha/4)$ est point critique

Pour (x, y) strictement positifs

En utilisant $\varphi(\alpha) = 0$