DM 02 équations différentielles

BCPST SPé 2

à rendre le 29 septembre

On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$|x|y' + (x-1)y = x^3 \quad (E)$$

1. Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$

- (a) Rechercher sur $\mathbb{R}^{+*}$ une solution particulière de (E), polynomiale du second degré.
- (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Résolution sur $\mathbb{R}^{-*}$

- (a) Vérifier que $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

3. Recherche d'une solution sur $\mathbb{R}$

Dans cette question on cherche à savoir s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3.$$

- (a) Supposons qu'une telle fonction f existe.
 - i. Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ puis pour $x \in]-\infty; 0[$.
 - ii. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer les limites en 0^+ et en 0^- de f et en déduire alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$, $x \in]-\infty; 0[$ et $x = 0$.
 - iii. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Que peut-on en déduire?
- (b) Réciproquement, vérifier que la fonction f trouvée dans la question précédente satisfait bien au problème donné.