ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
RÉPONSES PARTIELLES

Dans ce TD, les notations pour les fonctions inconnues et les variables peuvent changer d'un exercice à l'autre.

Équations linéaires

Exercice 1 (Premier ordre linéaire)**.**
Résoudre les équations suivantes, on donne une indication pour trouver la solution particulière :

1. $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$ *indication* $y_p : t \mapsto a\cos(2x) + b\sin(2x))$
2. $y'(x) + 2xy(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ *indication* variation de la constante.
3. $y'(x) + 2\tan(x)y(x) = \sin(2x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *indication* variation de la constante.
4. $y' + x^2 y = -x^2$ *indication* y_p constante.

Exercice 2 (⛰)**.**
Résoudre les équations suivantes

1. $y'(x) - \dfrac{x}{1+x^2}y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $]1; +\infty[$ *indication* y_p polynomiale
2. $y'(x) - \dfrac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$ sur $]1; +\infty[$ *indication* variation de la constante ou solution simple.

Exercice 3 (Second ordre, homogène)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 3x' - x = 0$
2. $x'' - 2x' + x = 0$
3. $x'' - 2x' + 2x = 0$

Exercice 4 (Second ordre)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$,
2. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$, on cherchera une solution particulière sous la forme $P(x)\mathrm{e}^x$ où P polynomiale.
3. $y'' + y' + y = \cos x$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$.

Exercice 5 (⛰)**.**
Résoudre $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$, on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax\cos(x)\mathrm{e}^x$ en remarquant que $y_{h_0} : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation homogène.

Exercice 6 (Conditions aux bords)**.**
Soit ω un réel strictement positif, a et b sont des réels et on pose $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. On cherche à résoudre l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad y(0) = a \qquad y(T) = b$$

1. Résoudre l'équation homogène sans condition.
2. À quelle condition sur a et b l'équation admet elle une solution, cette solution est elle unique ?
3. On change les conditions initiales par $y(0) = a \qquad y(T/2) = b$, quelles sont les solutions ?

Équation autonomes

Exercice 7.
Résoudre

1. $x'(t) = 1 + x^2(t)$ et $x(0) = x_0$
   indication On commencera par diviser par $1 + x^2$ après justification
2. Chercher les solutions à valeurs dans $]-1; 1[$ de l'équation $x'(t) = 1 - x^2(t)$ avec $x(0) = x_0$

Exercice 8 (⛰)**.**
Résoudre

1. $x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)} - 1$. avec $x(0) = x_0$
   Poser $z(t) = x(t) + t$,
2. $t.x'(t) = x(t).\Big(1 + \ln\big((x(t)) - \ln(t)\big)$. avec $x(1) = x_1 > 0$
   Poser $z(t) = \ln(x(t)/t)$.

<u>RÉPONSE:</u>

1. Pour t dans l'ensemble de résolution

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + 1 \\ &= \mathrm{e}^{x(t)} - 1 + 1 \\ &= \mathrm{e}^{z(t)-t} \\ &= \mathrm{e}^{z(t)}\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

Cherchons à résoudre cette dernière équation qui est à variables séparables et qui, comme une exponentielle n'est jamais nulle, est équivalente à .

$$-z'\mathrm{e}^{-z} = -\mathrm{e}^{-t}$$

Qui à pour solution en intégrant des deux côtés de l'égalité

$$\mathrm{e}^{-z(t)} - \mathrm{e}^{-z(0)} = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^0$$

donc

$$\mathrm{e}^{-z(t)} = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1$$

cas 1 Si $x_0 < 0$ alors $\mathrm{e}^{-x_0} - 1 > 0$

$$\begin{aligned} z(t) &= -\ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1\right) && \text{positivité} \\ &= -\ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1\right) \end{aligned}$$

La solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto -\ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1\right) - t$$

On vérifie par un calcul que cette fonction est bien solution

cas 2 Si $x_0 > 0$ La solution est

$$t \mapsto -\ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1\right) - t$$

et son ensemble de définition est l'ensemble $\left]-\infty; -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x_0}\right)\right[$ où on peut vérifier que $-\ln\left(-\mathrm{e}^{-x_0}\right) > 0$

2. Pour que cette équation puisse être mise sous la forme $x' = F(X, t)$ avec une F continue sur un intervalle , il faut que t soit non nulle, au vu de la condition initiale on cherche une solution dans un sous intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ On cherche forcément des solutions à valeurs strictement positives à cause du ln
Après transformation l'équation devient

$$\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{1}{t} = \ln\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

Ce qui donne

$$z'(t) = z(t)$$

donc en résolvant cette équation avec la condition initiale $z(1) = \ln\left(\frac{x_1}{1}\right)$

$$z\ : t \mapsto \ln(x_1)\mathrm{e}^{t-1}$$

Ce qui donne

$$x\ : t \mapsto t\exp\left(\ln(x_1)\mathrm{e}^{t-1}\right)$$

Cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut vérifier qu'elle est solution de l'équation.

❀

Recollement

Exercice 9 (Recollement détaillé)**.**

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.
2. On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0.$$

   Résoudre cette équation sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$.
3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.
On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Sur quel(s) intervalle(s) connaît-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

1. Soit a et b deux réels, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} \\ &= \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)} \end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité demandée **il suffit de choisir** a et b tels que $a + b = 3$ et $-a = -1$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\ \frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}}$$

2. L'équation (E) qui peut s'écrire sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$y'(x) - \frac{(3x-1)}{x(x-1)}y(x) + \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)} = 0 \qquad (E')$$

L'équation homogène associée (H) sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ est

$$y'(x) - \frac{(3x-1)}{x(x-1)}y(x) + \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)} = 0$$

Pour appliquer les théorèmes du cours il faut que la fonction $x \mapsto -\frac{(3x-1)}{x(x-1)}$ soit continue sur un intervalle.

$$\boxed{\text{On peut résoudre cette équation sur }]-\infty; 0[,\ ]0; 1[\text{ et }]1; +\infty[.}$$

Le résultat de la question précédente permet de trouver une primitive de $a\ : x \mapsto -\frac{(3x-1)}{x(x-1)}$, on pose $A\ : x \mapsto -\ln|x| - 2\ln|x-1|$. **Les valeurs absolues sont indispensables**. Sur chacun des intervalles les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $x \mapsto K|x|(|x-1|)^2$ où K est une constante réelle (qui peut être différents sur chaque intervalle).
Quitte à changer la constante on peut écrire :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E') \text{ sur chacun des intervalles sont les fonctions de la forme } x \mapsto Kx(1-x)^2 \text{ où } K \text{ est un réel quelconque.}}$$

3. On cherche une solution de (E) (sur $\mathbb{R}$) sous la forme d'une fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$. P est solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x(x-1)(2ax+b) - (3x-1)(ax^2+bx+c) + x^2(x+1) = 0$$

si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^3(-a+1) + x^2(-2b-a+1) - 2cx + c = 0$$

Il suffit de choisir les coefficients tels que

$$\begin{cases} -a+1 & = 0 \\ -2b-a+1 & = 0 \\ -2c & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2 \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : Prenez le temps de vérifier que cette fonction est bien une solution ; la vérification est bien plus rapide que le calcul qui précède.

4. D'après ce qui précède, et en utilisant le théorème de structure les solutions de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} K_1 x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ K_2 x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]0; 1[\\ K_3 x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

où K_1, K_2 et K_3 sont trois constantes réelles.
Il nous reste à trouver les éventuelles conditions sur les constantes pour que cette fonction soit prolongeable en 0 et en 1. Prenons une fonction de cette forme que l'on nomme y.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} y(x) = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} y(x) = 0$$

On peut toujours prolonger cette fonction par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} y(x) = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} y(x) = 1$$

On peut toujours prolonger cette fonction par continuité en 1 en posant $y(1) = 1$.
Les calculs donnent

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = K_1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = K_2$$

Pour que le prolongement soit dérivable en 0, il faut $K_1 = K_2$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = 2 \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = 2$$

Le prolongement est toujours dérivable en 1

$$\boxed{\text{Les solutions dérivables de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto x \mapsto \begin{cases} \lambda x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ \mu x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux constantes réelles}}$$

❀

Exercice 11 (Bonus, non détaillé).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = \sqrt{1+x^2}$,
2. $f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $f(0) = 2$.
3. $xf'(x) - f(x) = \ln(x)$,
4. $xf'(x) - f(x) = x^3$,
5. $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 + 2x^2$,
6. $(1-x^2)f'(x) + xf(x) = 0$,

RÉPONSE:

1. On divise par $(1+x^2)$ ce sui est toujours possible l'équation devient

$$f'(x) - \frac{x}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La méthode du cours permet de résoudre l'équation homogène

$$f_h \quad x \mapsto K\sqrt{1+x^2}$$

La méthode de la variation de la constante amène à résoudre

$$\lambda'(x)\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ce qui donne

$$\lambda(x) = \arctan(x) + K$$

Les solutions sont de la forme

$$x \mapsto \arctan(x)\sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2}$$

2. Comme le cosinus ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on peut simplifier en

$$f'(x)+\tan(x)f(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

En utilisant la méthode du cours et en remarquant que $\tan(x)=-\frac{\cos'(x)}{\cos x}$, les solutions de l'équation homogène sont

$$f_h\ :x\mapsto K\cos x$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\cos(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

En reconnaissant le dérivée de tangent on obtient

$$\lambda\ :x\mapsto\tan(x)+K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto\sin(x)+K\cos(x)$$

3. On étudie cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$, et on peut donc l'écrire sous la forme

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

Les solutions homogènes sont

$$x\mapsto Kx$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

Une intégration par parties donne

$$\lambda(x)=-\frac{\ln x+1}{x}+K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto Kx-\ln x-1$$

4. On réduit l'ensemble d'étude à $\mathbb{R}_+^*$; l'équation devient

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2$$

Nous venons de résoudre l'équation homogène, la variation de la constante donne

$$\lambda'(x)x=x^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto Kx+\frac{x^3}{2}$$

5. On étudie cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation devient

$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x^2}+2$$

Les solutions homogènes sont

$$x\mapsto\frac{K}{x}$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}+2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto\frac{\ln x}{x}+x+\frac{K}{x}$$

6. On va étudier cette équation sur $]-1;1[$, elle devient

$$f'(x)+\frac{x}{1-x^2}f(x)=0$$

les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto K\sqrt{1-x^2}$$

❀

Pour aller plus loin

Exercice 12 (changement de variable)**.**
On considère les équations différentielles :

$$y''(x)+2y'(x)+4y(x)=xe^x. \qquad (\mathscr{E})$$
$$t^2f"(t)+3tf'(t)+4f(t)=t\ln(t) \qquad (\mathscr{F})$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$.
2. Montrer que $(\mathscr{E})$ admet une solution particulière de la forme $x\mapsto P(x)e^x$ avec P un polynôme que l'on déterminera. Puis résoudre $(\mathscr{E})$.
3. Si $t\mapsto f(t)$ est une solution de $(\mathscr{F})$, quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $x\mapsto f(e^x)$? En déduire les solutions de $(\mathscr{F})$.

RÉPONSE:

Résultat du cours, il existe deux constantes A et B telles que

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x)+Be^{-t}\sin(\sqrt{3}x) \end{array}$$

$x \mapsto P(x)e^x$ est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si

$$P + 2P' + P'' + 2(P + P') + 4P = x$$

Donc P est de degré 1 et on trouve

$$P(x) = \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

$$\text{les solutions de } \mathscr{E} \text{ sont } x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x + Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$$

$g : x \mapsto f(\exp(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = e^x f'\left(e^x\right) \qquad g''(x) = e^{2x} f''\left(e^x\right) + e^x f(e^x)$$

$$t^2 f"(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

Peut s'écrire

$$t^2 f"(t) + t f'(t) + 2t f'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

et en posant $t = \exp(x)$

$$e^{2x} f"(e^x) + e^x f'(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x x$$

On constate que g vérifie la première équation

$$\forall x \in \mathbb{R} f(e^x) = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^t + Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$$

Avec $x = \ln(t)$

$$\text{les solutions sont de la forme } t \mapsto \left(\frac{1}{7}\ln(t) - \frac{4}{49}\right)t + \frac{A}{t}\cos(\sqrt{3}\ln(t)) + \frac{B}{t}\sin(\sqrt{3}\ln(t))$$

❀

Exercice 13 (Changement de fonction inconnue ⛰)**.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
2. Sur $]0; +\infty[$ résoudre $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z(x) = xy(x)$.

RÉPONSE:

Pour x réel,

$$\begin{aligned} z(x) &= (1+e^x)y(x) && \text{c'est toujours possible} \\ z'(x) &= (1+e^x)y'(x) + e^x y(x) \\ z''(x) &= (1+e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x) \end{aligned}$$

$(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = (1+e^x)y'' + 2e^x y' + e^x y + (e^x+1)y = z'' + z$ Résolvons

$$z''(x) + z(x) = xe^x$$

L'équation homogène à pour solution $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$. Cherchons une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^x$ où P est une fonction polynomiale, qui vérifie alors (en simplifiant par e^x)

$$P'' + 2P' + P + P = x$$

donc P doit être de degré 1 et on trouve $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x$, les solutions de l'équation en z sont donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x + A\cos(t) + B\sin(t)$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{1}{1+e^x}\left(\frac{1}{2}(x-1)e^x + A\cos(x) + B\sin(x)\right)$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose, ce qui cet intervalle est toujours possible

$$z(x) = xy(x)$$

$$z'(x) = xy'(x) + y(x) \qquad z''(x) = xy''(x) + 2y'(x)$$

On remarque

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = xy'' + 2y' + 2(xy' + y) + xy$$

L'équation en y devient

$$z'' + 2z' + z = 0$$

Qui admet pour solution

$$x \mapsto Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{A}{x}e^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x)$$

❀

Exercice 14 (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3.)**.**
Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs réelles de (E_1). On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g.
2. Résoudre (E_2).
3. Résoudre (E_1).

RÉPONSE:

1. $g' = f' + f'' + f^{(3)}$ Comme f est solution de (E_1), $g' = f' + f'' + f$,
   On constate alors que
   $$g' = g$$
2. g est de la forme $g(x) = Ke^x$

3. Nous devons donc maintenant résoudre

$$f(x) + f'(x) + f"(x) = Ke^x \qquad (E_3)$$

où K est un paramètre réel Une solution particulière cherché sous la forme λe^x est

$$f_P x \mapsto \frac{K}{3} e^x$$

Les solutions de l'équation homogènes sont de la forme

$$x \mapsto Ae^{-\dfrac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\dfrac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

En changeant les constantes, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$x \mapsto Ae^{-\dfrac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\dfrac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Ce^x$$

❀

Exercice 15.
On cherche à déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système[1] suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' - y & = & z \\ z' + z & = & 3y \end{array} \right.$$

1. On suppose que y et z sont des solutions de ce système, trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par y.
2. Résoudre cette équation, puis trouver l'expression de z.
3. Compléter ce raisonnement "Analyse-Synthèse" par la partie "synthèse".

RÉPONSE:

1. Si y et z sont solutions alors y' est combinaison linéaire de y et z donc dérivable.

$$\begin{aligned} y'' &= y' + z' && \text{première ligne dérivée} \\ &= y' + 3y - z \text{ deuxième ligne} \\ &= y' + 3y - (y' - y)\check{s} && \text{première ligne} \\ &= 4y \end{aligned}$$

$$y'' - 4y = 0$$

1. Les deux équations doivent être simultanément vérifiées

2.

$$y(x) = A\exp(2x) + B\exp(-2x)$$

$z = y' - y$

$$z(x) = A\exp(2x) - 3B\exp(-2x)$$

3. Il suffit de vérifier que y et z précédents sont bien solutions

❀

Exercice 16 (Autre utilisation de la variation de la constante)**.**
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(\mathscr{E}) \qquad x^2 y'' - 5xy' + 9y = 4x + 9.$$

1. Chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^r$ et utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver toutes le solutions de l'équation homogène.
2. Trouver les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 17 (Équations fonctionnelles)**.**
résoudre les équations suivantes

1. $f'(x) + f(x) = 2f(0)$
2. $f(x) + \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
3. $f'(x) + f(-x) = 0$

RÉPONSE:

1. Posons $K = f(0) + f'(0)$, l'équation devient

$$f' + f = K$$

On sait résoudre cette équation différentielle et on sait f est de la forme

$$f\ : x \mapsto Ce^{-x} + K$$

Réciproquement supposons que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C^{-x} + K$ où C et K sont deux constantes réelles
alors $f(0) = C + K$ $f'(0) = -C$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(x) = K = f(0) + f'(0)$$

Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C^{-x} + K$ où C et K sont deux constantes réelles

On trouve une constante de plus que pour une équadiff d'ordre 1

2. **Analyse** Supposons que f soit une solution continue sur un intervalle I (contenant 0) de l'équation fonctionnelle donnée. Alors d'après le théorème fondamentale de l'analyse

$$\varphi\ : x \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. et

$$\forall x \in I \varphi'(x) = x f(x)$$

On peut donc dériver l'égalité donnée

$$\forall x \in I \qquad f'(x) + x f(x) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle, il existe un réel K tel que

$$f x \mapsto K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Cette fonction étant définie sur $\mathbb{R}$
En réinjectant dans l'équation de départ, pour $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) + \int_0^0 t f(t)\,\mathrm{d}t &= K \\ &= 1 \end{aligned}$$

La seule solution continue possible sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Synthèse Supposons que f soit définie ainsi alors

$$\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - f(x)$$

ce qui permet de conclure

3. **Analyse**

Supposons que f soit solution de cette équation , On suppose f est dérivable sur un intervalle I centré en 0. Comme f' s'exprime à l'aide de f ; f' est dérivable donc f est deux fois dérivable et même de classe $\mathscr{C}^2$ et en dérivant l'équation

$$\forall x \in I \qquad f''(x) - f'(-x) = 0$$

Or $f'(-x) + f(x) = 0$ donc

$$\forall x \in I \qquad f''(x) + f(x) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle usuelle. Il existe deux constantes$a$ et b telles que

$$f x \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$$

fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors pour x réel

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(-t) + b\sin(-t) \\ &= -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(t) - b\sin(t) \end{aligned}$$

En prenant $t = 0$ on obtient $a + b = 0$ **Synthèse** Il est facile de vérifier que les fonctions $t \mapsto a\cos(t) - a\sin(t)$ pour a constante sont bien solution.

❀

Exercice 18.
On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ sur $]-1;+\infty[$:

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - x f(x) = (1+x)^2\mathrm{e}^x$$

1. Vérifier que la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène associée $(\mathscr{E}_0)$.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{E}_0)$. On pourra s'inspirer de 16.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

RÉPONSE:

On pose pour x réel $f(x) = \mathrm{e}^x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = f'(x) = \mathrm{e}^x$$

et pour x réel

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - x f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = 0$$

Cette fonction est bien solution de l'équation homogène.
Soit f une fonction définie sur $]-1;+\infty[$. on défini λ par

$$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad f(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^x \qquad \text{où} \qquad \lambda(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}$$

ce qui est toujours possible, et λ est dérivable par opérations

$$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad f'(x) = \big(\lambda(x) + \lambda'(x)\big)\mathrm{e}^x \qquad f'(x) = \big(\lambda(x) + 2\lambda'(x) + \lambda''(x)\big)\mathrm{e}^x$$

Après calculs et simplifications par e^x on trouve que f est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad (x+1)\lambda''(x) + (2x+1)\lambda'(x) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 vérifié par λ', On calcule une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$ en remarquant que $\dfrac{2x+1}{x+1} = 2 - \dfrac{1}{x+1}$

$$\begin{array}{rccl} \lambda' : &]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & K(x+1)\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \qquad K \text{ constante}$$

On intègre cette fonction par une intégration par parties

$$\begin{array}{rccl} \lambda : &]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-2x} + G_2 \end{array} \qquad G_1, G_2 \text{ constantes}$$

les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-x} + G_2\mathrm{e}^x$

Il suffit de chercher une solution particulière de la forme $P(x)\mathrm{e}^x$ où P est une fonction polynomiale. P vérifie alors

$$(x+1)P''(x) + (2x+1)P'(x) = (x+1)^2$$

On doit donc chercher une fonction polynomiale de degré 2 sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Après calcul $P(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x$ convient

Les solutions de l'équation sur $]-1;+\infty[$ sont les fonctions

$$x \mapsto G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-x} + \left(G_2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{x}$$

❀

Exercice 19 (Forme théorique des solutions)**.**
On s'intéresse à l'équation différentielle autonome

$$y' = F(y)$$

où F est une fonction continue, ne s'annulant pas sur un intervalle I

1. Montrer qu'il existe une fonction G une primitive de $\frac{1}{F}$ sur I
2. Démontrer que G induit une bijection de I vers un intervalle J que l'on ne cherchera pas à calculer
3. Soit λ un réel fixé, on pose

   $$y : t \mapsto G^{-1}(t+\lambda)$$

   Montrer que y est solution de l'équation différentielle.
4. Essayez de démontrer la réciproque.

Attention : ce résultat n'est pas un résultat qu'on utilise en pratique pour résoudre des équations différentielles