

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

20 SEPTEMBRE 2025

Durée de l'épreuve : 2h

Le devoir comporte un exercice et un problème indépendants.
La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés.

Exercice : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) ci-dessous à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(1 + e^x) y' - y + \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right)^2 = 0.$$

1. a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

- b) Donner le tableau de variations, avec les limites, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction.

- c) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. a) **Appliquer la méthode de variation de la constante** et en déduire que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1 + e^x} \right).$$

- b) En discutant selon λ , déterminer un équivalent (le plus simple possible) de cette solution au voisinage de $+\infty$.

Problème : Extremum d'une fonction de deux variables

Résultats préliminaires

- Donner la définition d'une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert.
- Énoncer rigoureusement le résultat du cours reliant la notion de point critique à celle d'extremum local.
- Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle *disque unité ouvert* (noté D) l'ensemble des points M tels que $\|\vec{OM}\| < 1$ et *disque unité fermé* (noté $\overline{D}$) l'ensemble des points M tels que $\|\vec{OM}\| \leq 1$.
 - Exprimer $\|\vec{OM}\|$ en fonction des coordonnées (x, y) de M dans $\mathcal{R}$.
 - En déduire que l'on a :

$$M \in D \iff 1 - x^2 - y^2 > 0.$$

Extrema d'une fonction de deux variables

Soit la fonction g de deux variables définie sur $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 1 - u - v > 0\}$ par :

$$g(u, v) = (u - v)\sqrt{1 - u - v}.$$

On admet que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A (A n'est pas un pavé ouvert, mais on admet que la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ s'étend).

- Dans le plan muni d'un repère orthonormal (échelle : 2cm), représenter graphiquement l'ensemble des points $M(u, v)$ tels que $(u, v) \in A$.
 - Calculer pour tout $(u, v) \in A$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$.

Soit la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

5. a) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
 b) Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$ puis tracer **en ROUGE** dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$ (échelle : 2cm) l'ensemble des points $M(x, y)$ pour lesquels $f(x, y) = 0$.
 c) Déterminer le signe de $f(x, y)$ selon les valeurs de (x, y) et illustrer graphiquement le résultat **sur le dessin de la question précédente**.
6. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D (là non plus, D n'est pas un pavé ouvert, mais on admet que la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ s'étend).
 a) Exprimer, pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y)$ à l'aide de la fonction g .
 b) À l'aide de la question précédente, exprimer pour tout $(x, y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$.
 c) En déduire, pour tout $(x, y) \in D$, une expression de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en fonction de x et y .
7. On remarque également que $f(x, y) = -g(y^2, x^2)$.
 a) À l'aide de cette relation, exprimer pour tout $(x, y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial u}$.
 b) En déduire, pour tout $(x, y) \in D$, une expression de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de x et y .
8. a) Résoudre le système d'inconnues x et y suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + 3y^2 = 2. \end{cases}$$

On note E_1 l'ensemble des solutions de ce système.

- b) Sur le dessin de la question 5. b), placer les points $B(x, y)$ pour lesquels $(x, y) \in E_1$ (les points seront numérotés $B_1, B_2, \dots$) puis démontrer que ces points n'appartiennent pas à D .
9. En déduire que la fonction f admet exactement cinq points critiques sur D que l'on précisera.
10. Placer sur le dessin de la question 5. b) les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dont les coordonnées sont les points critiques de f sur D .
11. On admet que le résultat de la question 2. s'applique à la fonction f sur D bien que D ne soit pas un pavé ouvert.
 Expliquer pourquoi le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum local (on pourra s'appuyer sur les résultats de la question 5. c)).
12. Dresser le tableau de variations complet de la fonction h définie par $h(t) = t\sqrt{1-t}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
13. On souhaite effectuer le changement de variable suivant : $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[$.
 a) Montrer que $(x, y) \in D \iff (\rho, \theta) \in [0; 1] \times [0; 2\pi[$.
 b) Montrer que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = h(\rho^2) \cos(2\theta)$.
 c) En déduire que f admet un extremum global en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ (préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et la valeur de l'extremum).
14. Sans effectuer de calcul supplémentaire, déterminer tous les extrema de f sur D en précisant pour chacun s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et en quel(s) point(s) ils sont atteints.
15. Pour finir, on s'intéresse aux points situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.
 Préciser en lesquels de ces points f admet un extremum local (justifier votre réponse).