Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

b) La fonction $x \mapsto 1+\mathrm{e}^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc par opérations sur les fonctions monotones, $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Les limites en $-\infty$ et $+\infty$, ne sont pas des formes indéterminées

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$	1	$\searrow \dfrac{1}{2} \searrow$	0

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

def f(x):
    return 1/(1+m.exp(x))

a=-10
b=10
n=10**5
X=[a+(b-a)*k/n for k in range(0,n+1) ]
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y,label="y=f(x)",linewidth=4)
plt.xlabel("x")
plt.xlabel("y")
plt.legend()
plt.show()
```

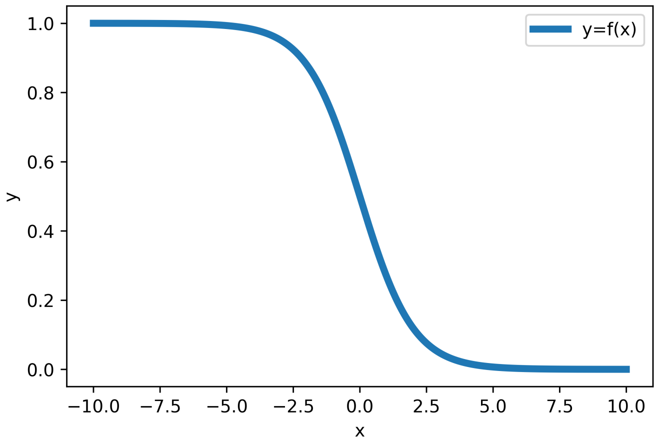
c) Comme pour tout x réel $1+\mathrm{e}^x$ est non nul, l'équation différentielle homogène associée à (E) peut s'écrire :

$$y'(x) - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}y(x) = 0. \tag{H}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ on sait que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle homogène est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ et λ un réel quelconque.

En utilisant le calcul de la question 1.a) on constate qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est $x \mapsto \ln\left(\left|1+\mathrm{e}^{-x}\right|\right) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (H) \text{ sont les fonctions définies sur } \mathbb{R} \text{ par } x \mapsto \lambda\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) \text{ où } \lambda \text{ est un réel quelconque.}}$$



2. a) Soit λ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$, solution de (H) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y_0(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

et $y = \lambda y_0$

$$\begin{aligned}
y \text{ sol de } (E) \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (1+\mathrm{e}^x)\, y'(x) - y(x) + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} y(x) + \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\lambda(x) y_0(x) + \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x)\left(y_0'(x) - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} y_0(x)\right) + \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) y_0(x) + 0 + \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = 0 & y_0 \text{ sol de } (H) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = -\frac{(\mathrm{e}^x)^2 (1+\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^x)^3} & \text{expression de } y_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = -\frac{(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x+1)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}
\end{aligned}$$

Les primitives, sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de $x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ sont exactement les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + \mu$ où μ est une constante réelle quelconque.

On remarque aussi que comme y_0 ne s'annule jamais, toute fonction peut s'écrire sous la forme λy_0.

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\left(\lambda + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right).}$$

b) On peut commencer par remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$. Donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + \lambda = \lambda$. Donc pour $\lambda \neq 0$, $\lambda + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda$.

Ainsi, par produit d'équivalents, $\boxed{\text{pour } \lambda \neq 0,\ y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda.}$

Pour $\lambda = 0$, $y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

De plus $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour } \lambda = 0,\ y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}.}$

Problème

Résultats préliminaires

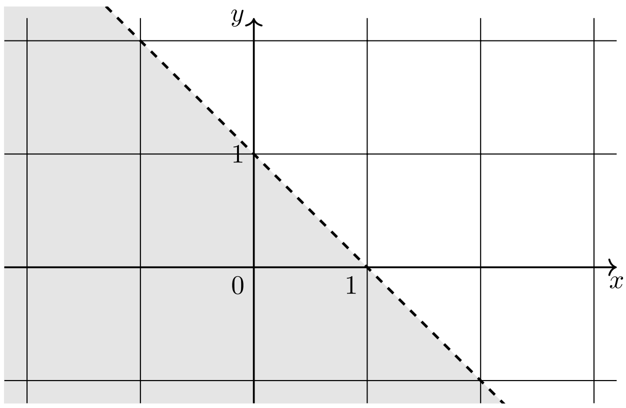
1. On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé ouvert U lorsque f admet en tout point de U des dérivées partielles par rapport à ses deux variables et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.
2. Si une fonction de deux variables f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert U et qu'elle admet un extremum en un point de U, alors ce point est un point critique de f.
3. a) Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$. On a $\boxed{\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$.
   b) Par définition de D, on a :

$$\begin{aligned} M \in D &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\| < 1 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2 < 1 \quad (\text{la fonction} \quad t \mapsto t^2 \quad \text{étant strictement croissante sur} \quad \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{M \in D \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0}$.

Extrema d'une fonction de deux variables

4. a) Méthode : on trace la droite d'équation $1 - x - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$ en pointillé et on hachure ou colorie la partie du plan situé « sous » la droite.



   b) Soit $(u, v) \in A$,

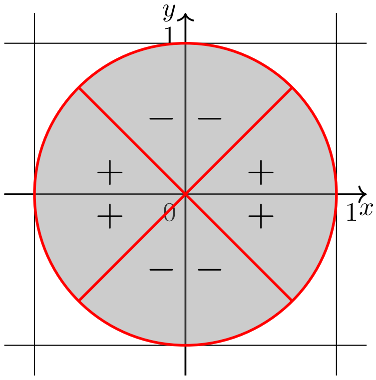
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \sqrt{1-u-v} + (u-v) \times \frac{-1}{2\sqrt{1-u-v}} \\ &= \frac{2(1-u-v)-(u-v)}{2\sqrt{1-u-v}} \\ &= \boxed{\frac{2-3u-v}{2\sqrt{1-u-v}}} \end{aligned}$$

5. a) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc définie pour les (x, y) tels que $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ ce qui correspond aux points $M(x, y) \in \overline{D}$.
   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } \mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 1-x^2-y^2 \geqslant 0\} = \overline{D}.}$
   b) Soit $(x, y) \in \mathscr{D}_f$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \ \underline{\text{ou}}\ \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \ \underline{\text{ou}}\ x = -y \ \underline{\text{ou}}\ x^2+y^2 = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des points où f est nulle est donc la réunion de la portion de la droite d'équation $y = x$ incluse dans le disque fermé $\overline{D}$, de la portion de la droite d'équation $y = -x$ incluse dans le disque fermé $\overline{D}$ et du cercle de centre O et de rayon 1 (cf dessin).

c) Sur $\mathscr{D}_f$, on a $\sqrt{1-x^2-y^2} \geqslant 0$ donc $f(x,y)$ a le même signe que $x^2 - y^2$. Or $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, donc $\boxed{f(x,y) > 0 \Leftrightarrow \Big((x > y \quad \text{et} \quad x > -y) \quad \text{ou} \quad (x < y \quad \text{et} \quad x < -y)\Big)}$ (cf dessin)



6. a) Pour tout $(x,y) \in D$, $\boxed{f(x,y) = g(x^2, y^2).}$

b) Soit $(x,y) \in D$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\dfrac{\partial g}{\partial u}(x^2,y^2)}$.

c) On en déduit que, pour $(x,y) \in D$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x(2-3x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}$.

7. a) Soit $(x,y) \in D$, comme $f(x,y) = -g(y^2, x^2)$, on a $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\dfrac{\partial g}{\partial u}(y^2,x^2)}$.

b) Ainsi $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y(2-3y^2-x^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}$.

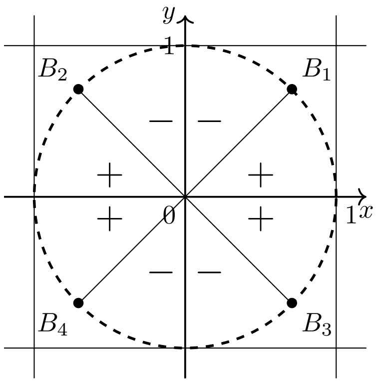
8. a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + 3y^2 = 2 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} -8y^2 = -4 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\ x^2 + 3y^2 = 2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{1}{2} \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le système admet donc quatre solutions :

$$\boxed{E_1 = \left\{\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B_1}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B_2}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B_3}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B_4}\right\}.}.$$

b) Sur le dessin, les points se placent de la manière suivante :



Pour les 4 points ci-dessus on remarque que $x^2 + y^2 = 1$. On a donc $||\overrightarrow{OB_i}|| = 1$ et donc $B_i \notin D$.

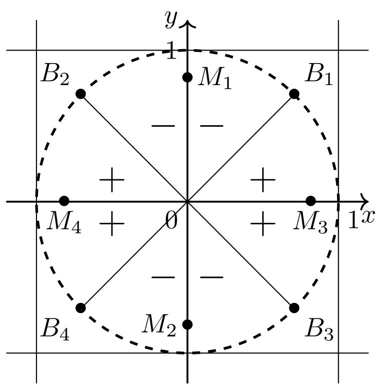
9. Soit $(x, y) \in D$. (x, y) est un point critique de f ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Or

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x(2-3x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \\ \dfrac{-y(2-3y^2-x^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x(2-3x^2-y^2) = 0 \\ -y(2-3y^2-x^2) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } (2-3x^2-y^2) = 0 \\ y = 0 \text{ ou } (2-3y^2-x^2) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 2-3y^2-x^2 = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2-3x^2-y^2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2-3x^2-y^2 = 0 \\ 2-3y^2-x^2 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 3x^2+y^2 = 2 \\ x^2+3y^2 = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Le dernier système est le système (S) étudié à la question 8. et nous avons vu que ses solutions n'appartiennent pas à D.
Les points critiques de f sur D sont donc les cinq couples

$$\boxed{\underbrace{(0,0)}_{M_0}, \underbrace{\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}_{M_1}, \underbrace{\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}_{M_2}, \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)}_{M_3}, \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)}_{M_4}}$$

10.



11. On a $f(0,0) = 0$. Or on peut remarquer (on peut s'aider du dessin) que, pour tout $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$, $f(x,0) > 0 = f(0,0)$ et pour tout $y \in [-1;1] \setminus \{0\}$, $f(0,y) < 0 = f(0,0)$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ ne peut donc admettre en } (0,0) \text{ ni un maximum local, ni un minimum local.}}$

12. La fonction h est dérivable sur $[0, 1[$. Soit $t \in [0, 1[$,

$$h'(t) = \sqrt{1-t} - \frac{t}{2\sqrt{1-t}} = \frac{2-3t}{2\sqrt{1-t}}$$

D'où le tableau de variation suivant :

t	0		$2/3$		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$h(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

13. a) On reprend la définition de D :

$$(x, y) \in D \Longleftrightarrow x^2 + y^2 < 1 \Longleftrightarrow \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) < 1 \Longleftrightarrow \rho^2 < 1.$$

Comme ρ est supposé positif ou nul, on a bien $\boxed{(x, y) \in D \Longleftrightarrow (\rho, \theta) \in [0; 1[\times[0; 2\pi[.}$

b) Soit $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \\
&= [(\rho\cos(\theta))^2 - (\rho\sin(\theta))^2]\sqrt{1 - [(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2]} \\
&= \rho^2[\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2]\sqrt{1-\rho^2} && (\text{car} \quad (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1) \\
&= h(\rho^2)\cos(2\theta) && (\text{car} \quad (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta))
\end{aligned}$$

On a bien, $\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in D,\ f(x, y) = h(\rho^2)\cos(2\theta).}$

c) D'après la question 12., sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction h est à valeurs positives et admet un maximum $h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ en $\frac{2}{3}$. Donc pour tout point (x, y) de D, on a :

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} \leqslant f(x, y) = h(\rho^2)\cos(2\theta) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

puisque $\rho^2 \in [0; 1[$ et $-1 \leqslant \cos(2\theta) \leqslant 1$.

De plus $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) = h\left(\frac{2}{3}\right)\cos(0) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, on a donc $f(x, y) \leqslant f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ pour tout $(x, y) \in D$, ce qui signifie que la fonction f admet un maximum global en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ qui vaut $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

14. En utilisant que pour $(x, y) \in D$ $f(-x, y) = f(x, y)$, et ce que l'on a fait à la question précédente on en déduit f atteint aussi son maximum en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$.

En utilisant que pour $(x, y) \in D$ $f(y, x) = -f(x, y)$, et ce qui précède, on en déduit que f admet un minimum global qu'elle atteint en $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et en $\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ce minimum vaut $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

15. Sur le cercle de centre O et de rayon 1 on a $f(x, y) = 0$ donc sur ce cercle f n'admet pas d'extremum global. Regardons s'il ne s'agit toutefois pas d'extremum locaux. On peut s'aider du dessin de la question 5.c).

Aux points B_1, B_2, B_3 et B_4 on peut voir que f n'admet pas d'extremum local car aussi près que l'on veut de ces points on peut trouver des points où f est strictement positive et où f est strictement négative (cf dessin).

Pour les autres points du cercle, la fonction f est nulle en ce point et en regardant le signe de f au voisinage de ce point on voit que f est de signe constant. Ainsi, f admet sur le cercle de centre O et de rayon 1 un extremum local en tous les points autres que les points B_i.