DM 02 équations différentielles

Bio Spé

Réponses

1. (a) Soit $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

   De plus, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x(2ax+b)+(x-1)(ax^2+bx+c) = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

   On en conclut que $y_p : x \mapsto x^2 - x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{++}$.

   (b) L'équation homogène associée à (E) est $(H) : |x|y' + (x-1)y = 0$.

   Sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $x \neq 0$, on a $(H) \Leftrightarrow y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = 0$.

   La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et une primitive est $x \mapsto x - \ln(x)$.

   Donc les solutions de (H) sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_H(x) = \lambda\varepsilon^{-x+\ln(x)} = \lambda x\varepsilon^{-x}$

   D'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{++}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y(x) = x^2 - x + \lambda x\varepsilon^{-x}.$$

2. (a) $y_p : x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ par somme et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad -xy_p'(x) + (x-1)y_p(x) &= -x\left(2x + 3 - \frac{6}{x^2}\right) + (x-1)\left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right) \\ &= -2x^2 - 3x + \frac{6}{x} + x^3 - x^2 + 3x^2 \\ &\quad - 3x + 6x - 6 + 6 - \frac{6}{x} \\ &= x^3.\end{aligned}$$

   Donc cette fonction est bien une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

   (b) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, l'équation homogène associée est équivalente à $y' + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)y = 0$.

   La fonction $x \mapsto -1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ et une primitive est $x \mapsto -x + \ln(|x|)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \mu\varepsilon^{x-\ln|x|} = -\frac{\mu\varepsilon^x}{x}$.

   Donc, d'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad y(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu\varepsilon^x}{x}.$$

3. (a) i. f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc il existe λ et μ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x\varepsilon^{-x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6-\mu\varepsilon^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   ii. Comme f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

   De plus $\lim_{x\to 0^+} x^2 - x + \lambda x\varepsilon^{-x} = 0$ et :

$$\lim_{x\to 0^-} x^2+3x+6+\frac{6-\mu\varepsilon^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 6 \\ 0 & \text{si } \mu = 6 \\ +\infty & \text{si } \mu > 6 \end{cases} \text{ (car } \frac{\varepsilon^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1\text{).}$$

   Donc, comme f doit être continue en 0, on a forcément $\mu = 6$ et donc

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x\varepsilon^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1-\varepsilon^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   iii. Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - 1 + \lambda\varepsilon^{-x}$ donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lambda - 1$.

Pour $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x+3+6\dfrac{x+1-\varepsilon^x}{x^2}$. Or $x+1-\varepsilon^x = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Donc $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3-3 = 0$.

Or on a supposé au début de cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. On doit donc avoir $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, et donc on a forcément $\lambda = 1$.

En conclusion, s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |x|f'(x)+(x-1)f(x) = x^3,$$

alors nécessairement $f(x) = \begin{cases} x^2-x+x\varepsilon^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2+3x+6+6\frac{1-\varepsilon^x}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

(b) Par construction, la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x+x\varepsilon^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2+3x+6+6\frac{1-\varepsilon^x}{x} & \text{si } x<0 \end{cases},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ d'après les théorème généraux et dérivable en 0 d'après les calculs de la question 3.a)(iii).

De plus, $f'(x) = \begin{cases} 2x-1-x\varepsilon^{-x}+\varepsilon^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 2x+3+6\frac{(1-x)\varepsilon^x-1}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Donc :

- Pour $x>0$: $xf'(x)+(x-1)f(x) = 2x^2-x-x^2\varepsilon^{-x}+x\varepsilon^{-x}+(x-1)(x^2-x+x\varepsilon^{-x}) = x^3$.
- Pour $x=$: $0f'(0)+(0-1)f(0) = 0 = 0^3$.
- Pour $x<0$: $-xf'(x)+(x-1)f(x) = -2x^2-3x-6\frac{(1-x)\varepsilon^x-1}{x}+(x-1)\left(x^2+3x+6+6\dfrac{1-\varepsilon^x}{x}\right) = x^3$.

La fonction f satisfait bien au problème donné.