DM 03 séries

BCPST Spé 2

à rendre le mercredi 05 octobre 2023

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème des séries alternées :

Théorème 1.
si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0, alors la suite (S_n) définie pour $n \geq 0$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

est convergente.

Puis de s'en servir pour calculer une somme classique.
On pose pour $n \geq 0$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.
4. On suppose pour toute la suite de l'exercice que $a_n = \frac{1}{n+1}$. Donner une fonction en python `approx(eps)` donnant un encadrement de ℓ d'amplitude inférieur ou égal à `eps`.
5. Dans cette question, on va prouver que $\ell = \ln 2$.
   (a) Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, justifier l'égalité

   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

   (b) On pose, pour $n \geq 1$,

   $$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

   Démontrer que (I_n) tend vers 0.

   (c) Conclure.