

# Concepts de base en probabilités.

BCPST Spé 2

Lycée Champollion Grenoble

Octobre 2025

## Table des matières

<b>I Définitions</b>	<b>2</b>
I.1 Opérations ensemblistes . . . . .	2
I.2 Espaces probabilisables . . . . .	3
I.3 Probabilités . . . . .	5
I.4 Rappels : Cas d'une probabilité sur un univers fini . . . . .	7
I.5 Cas d'une probabilité sur univers dénombrable . . . . .	8
<b>II Probabilité conditionnelle et indépendance</b>	<b>8</b>
II.1 Probabilité conditionnelle . . . . .	8
II.2 Indépendance . . . . .	9
<b>III Les grands théorèmes</b>	<b>10</b>
III.1 Formule des probabilités totales . . . . .	10
III.1.a Une application . . . . .	12
III.2 Formule des probabilités composées . . . . .	12
III.3 Théorème de Bayes . . . . .	12
III.3.a Un premier exemple . . . . .	12
III.3.b Le théorème . . . . .	13

# I Définitions

## I.1 Opérations ensemblistes

Dans cette partie, on considère des parties (sous-ensembles) d'un ensemble  $\Omega$  appelé **univers**.

**Définition 1** (Union et intersection de deux ensembles, complémentaire).

Soit  $A$  et  $B$  deux sous ensembles de  $\Omega$ , on note

- L'union  $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- L'intersection  $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- Le complémentaire  $\bar{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$ .

**Définition 2** (Généralisation).

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de sous ensembles de  $\Omega$

- L'union  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega / \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n\}$
- L'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega / \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n\}$

**Définition 3** (Dénombrable).

Un ensemble est **(infini) dénombrable** si ses éléments peuvent être indexés sans répétition ni omission par les entiers de  $\mathbb{N}$ . Autrement dit si il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  vers cet ensemble.

**Exemple** :  $\mathbb{N}$  est dénombrable,  $\mathbb{N}^*$  est dénombrable  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable

**Proposition 1** (Opérations).

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $B$  des parties de  $\Omega$

- $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n$
- $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n$
- $B \cap \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$
- $B \cup \left( \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n)$

**Démonstration :**



## I.2 Espaces probabilisables

Dans la théorie des probabilités l'univers des possibles est un ensemble  $\Omega$  et les événements que l'on étudie sont certains sous-ensembles de  $\Omega$ . Par exemple on lance un dé à six faces l'univers, et l'événement  $A =$  "obtenir un nombre pair"

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A = \{2, 4, 6\}$$

Dans les expériences avec un univers fini que vous avez étudié l'année dernière, *a priori* toute partie de  $\Omega$  pouvait être vu comme un événement, dont on peut calculer la probabilité.

**Définition 4** (Événement élémentaire).

Un **événement élémentaire** est un événement du type  $\{x\}$  où  $x \in \Omega$ .

**Définition 5** ( $\sigma$ -algèbre ou tribu).

Soit  $\Omega$  un univers. On appelle **tribu** ou  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$  tout ensemble  $\mathcal{F}$  de parties de  $\Omega$  vérifiant :

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{F}$ , alors  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$ , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

**Proposition 2** (Propriétés élémentaires d'une  $\sigma$ -algèbre).

Soit  $\Omega$  un univers et  $\mathcal{F}$  une  $\sigma$ -algèbre.

Alors :

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$ , alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

3.  $\mathcal{F}$  stable par union et intersection fini.

**Démonstration :**



**Exemples élémentaires**

1.  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu sur  $\Omega$ .
2.  $\{\emptyset, \Omega\}$  est une tribu sur  $\Omega$ .
3. Soit  $\Omega = \{a, b, c\}$  alors  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$  est une tribu (vérification laissée en exercice).
4. On prend une cible de rayon  $r = 3m$  et divisée en trois secteurs concentriques .  
On note  $\mathcal{P}$  le plan et  $O$  le centre de la cible  $\Omega = \{M \in \mathcal{P} / \|\overrightarrow{OM}\| < 3\}$  et

$$\mathcal{F} = \left\{ \emptyset, \Omega, \left\{ M \in \mathcal{P} / \|\overrightarrow{OM}\| < 1 \right\}, \left\{ M \in \mathcal{P} / 1 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 2 \right\}, \left\{ M \in \mathcal{P} / 2 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 3 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ M \in \mathcal{P} / 0 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 2 \right\}, \left\{ M \in \mathcal{P} / 1 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 3 \right\}, \left\{ M \in \mathcal{P} / 0 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 1 \text{ ou } 2 \leq \|\overrightarrow{OM}\| < 3 \right\} \right\}$$

**Définition 6** (Espace probabilisable).

Un **espace probabilisable** est un couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  où  $\Omega$  est un univers associé à une expérience aléatoire et  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$  des événements liés à cette expérience aléatoire.

Si  $\Omega$  est fini on choisit presque toujours  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Vocabulaire :**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable

1.  $\emptyset$  est appelé **l'événement impossible** et  $\Omega$  **l'événement certain**.
2. On dit qu'un événement  $A$  **implique** un événement  $B$  lorsque  $A \subset B$ . (Tout possible  $\omega$  de  $A$  réalise  $B$  (i.e.  $\forall \omega \in A, \omega \in B$ )).
3. Soit  $A$  un événement, alors  $\bar{A}$  est appelé **l'événement contraire** de  $A$ .

**Exemple :** Si  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (résultat d'un lancer d'un dé)  $A = \{4, 6\}$ ="obtenir 4 ou 6" et  $B = \{2, 4, 6\}$ ="obtenir un nombre pair" alors  $A$  implique  $B$ .

**Définition 7** (Incompatibles).

1. Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** lorsque  $A \cap B = \emptyset$ .
2. Les événements  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont dits **deux à deux incompatibles** lorsque

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N} \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

**Définition 8** (Système complet d'événements).

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie d'événements  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  (respectivement toute suite d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) qui vérifient

1. les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles,
2.  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$  (respectivement.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ ).

Cette notion correspond à la notion ensembliste de partition d'un ensemble.

### I.3 Probabilités

**Définition 9** (Probabilité).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable. Une **probabilité** est une application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\rightarrow \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. ( $\sigma$ -additivité de  $\mathbb{P}$ )  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille **dénombrable** d'événements **2 à 2 incompatibles**, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

C'est la somme totale d'une série convergent (absolument).

**Définition 10** (Espace probabilisé).

Un **espace probabilisé** est un triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  tel que  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un espace probabilisable et  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur cet espace.

**Définition 11** (Ensembles négligeables, presque sûrs).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- On dit que  $A \in \mathcal{F}$  est **négligeable** si et seulement si

$$\mathbb{P}(A) = 0$$

- On dit que  $A \in \mathcal{F}$  est **presque sûr** si et seulement si

$$\mathbb{P}(A) = 1$$



**Attention :** Il faut distinguer "impossible" de "négligeable". Par exemple Si on lance répète une infinité de fois des expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, on peut choisir  $\Omega = \{\text{suites à valeurs dans } 0, 1\}$  et l'événement "obtenir que des succès" qui correspond à l'événement élémentaire { suite constante égale à 1}, cette événement n'est pas impossible (il n'est pas vide) mais on pourra démontrer que la probabilité qu'il se réalise est nulle.

**Proposition 3** (Propriétés de base d'une probabilité).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On a alors

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

2. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des événements incompatibles deux à deux alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$$

3. Notamment si  $A$  et  $B$  sont des événements incompatibles alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

4. Soit  $A$  un événement. Alors  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

5. Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $A$  implique  $B$  (i.e.  $A \subset B$ ). Alors

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

**Démonstration :**

**Proposition 4 (Union).**

1. Soit  $A$  et  $B$  deux événements

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

2. Soit  $A, B$  et  $C$  trois événements

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) =$$

#### I.4 Rappels : Cas d'une probabilité sur un univers fini

Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . Définissons les réels  $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ces réels vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $p_i \geq 0$

$$2. \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Réciproquement, soient  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de réels ayant les propriétés 1 et 2 précédentes. Alors il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$$

#### Un cas particulier important : l'équiprobabilité

**Définition 12** (Équiprobabilité).

Considérons un univers fini  $\Omega$ . On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque

$$\forall (\omega, \eta) \in \Omega^2 \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\eta\}).$$

Dans ce cas, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

La probabilité ainsi obtenue est appelée **probabilité uniforme** sur  $\Omega$ .

De plus, si  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$  est un événement, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \mathbb{P}(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Lorsque la probabilité  $\mathbb{P}$  sur l'univers  $\Omega$  est uniforme alors la probabilité d'un événement  $A$  est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de possibles favorables à } A}{\text{Nombre total de possibles}}.$$

Quand sait-on qu'il y a équiprobabilité?

- L'énoncé le précise de façon claire.
- On trouve dans l'énoncé les adjectifs : « honnête », « non truqué », « non pipé » ... ou la locution « au hasard »

**Exemple** : dè honnête : il y a équiprobabilité, pièce truquée : il n'y a pas équiprobabilité.

**Attention** : Ne pas utiliser  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de possibles favorables à } A}{\text{Nombre total de possibles}}$ . lorsqu'il n'y a pas équiprobabilité!



## I.5 Cas d'une probabilité sur univers dénombrable

**Exemple :** On lance une pièce jusqu'à obtenir un résultat "Face". on pose alors

$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, \dots\}$$

Si  $\Omega$  est un univers dénombrable, on montre comme dans le cas d'un univers fini qu'une probabilité  $P$  sur  $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$  est caractérisée par la donnée des probabilités des événements élémentaires  $\{\omega_n\}$

Plus précisément, les réels  $p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$  vérifient les deux propriétés suivantes :

1.  $\forall i \in \mathbb{N} \quad p_i \geq 0$
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$

Réciproquement on admet que si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de réels ayant les propriétés 1 et 2 précédentes. Alors il existe une unique probabilité<sup>1</sup>  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$$

**Attention :** On ne peut pas avoir une équiprobabilité sur un univers dénombrable!

**Exemple :** On choisit  $\Omega = \mathbb{N}$  et on choisit la probabilités suivante :

$$p_0 = \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2} \quad p_1 = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} \quad \text{et de façon générale}^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \mathbb{P}(\{n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a bien  $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

Dans ce cas on peut par exemple calculer la probabilité d'avoir un nombre pair de pile.



## II Probabilité conditionnelle et indépendance

### II.1 Probabilité conditionnelle

**Définition 13** (Probabilité conditionnelle).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $B$  un événement de probabilité non nulle alors on note

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{F} &\rightarrow [0; 1] \\ B &\rightarrow \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

C'est la **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$ .

1. On munit l'univers de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$
2. on pourra écrire  $\mathbb{P}(n)$  pour  $\mathbb{P}(\{n\})$ .

**Notation et vocabulaire :**

On trouve aussi la notation hors programme :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$$

**Théorème 1.**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $B \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . Alors  $\mathbb{P}_B$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Démonstration :**



## II.2 Indépendance

**Définition 14** (Indépendance de deux événements).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

**Exemple :** On lance successivement 2 dés; on considère que la probabilité est uniforme.

Ici  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  Alors les événements  $A_i$  : « le premier résultat est  $i$  » et  $B_j$  : « le deuxième résultat est  $j$  » sont indépendants.

Réciproquement si on suppose que  $A_i$  et  $B_j$  sont indépendants et que le dé est non truqué, alors la probabilité sur  $\Omega$  est uniforme.

On dit que les lancers sont indépendants

**Proposition 5** (Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle alors  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi.



**Attention :** l'indépendance dépend de l'espace probabilisé choisi.

Pas vraiment au programme

**Définition 15** (Indépendance 2 à 2 de  $n$  événements).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On dit que  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont **2 à 2 indépendants** lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j).$$

**Définition 16** (Indépendance mutuelle d'une famille d'événements).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On dit que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont **mutuellement indépendants** lorsque pour tout entier  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et pour toute famille d'indices  $(i_1, \dots, i_k)$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite (infinie) d'événements, On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants.



**Attention :** Si des événements sont mutuellement indépendants, ils sont, de façon immédiate, indépendants deux à deux. Mais la réciproque est fausse.

**Exercice :** On lance une pièce non truquée, et on note

- A : « On obtient un pile au premier lancer ».
- B : « On obtient un pile au deuxième lancer ».
- C : « On obtient deux résultat différents ».

Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

**Proposition 6** (Passage au complémentaire).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé.

1. Si les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont **mutuellement indépendants** alors les événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  où  $B_k = A_k$  ou  $\overline{A_k}$  sont aussi mutuellement indépendants.
2. Si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est formée d'événements mutuellement indépendants, on posant pour chaque entier  $B_n = A_n$  ou  $B_n = \overline{A_n}$  alors la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est formée d'événements mutuellement indépendants

**Démonstration :**

5

### III Les grands théorèmes

#### III.1 Formule des probabilités totales

**Théorème 2** (Formule des probabilités totales).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements

Alors, pour tout événement  $E \in \mathcal{F}$

•

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap E)$$

•

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(E)$$

avec la convention que si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  alors, même si la probabilité conditionnelle n'est pas définie, on pose  $\mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(E) = 0$ .

**Remarque :** On peut facilement adapter ces résultats au cas où le système complet d'événement est fini

**Démonstration :**

•

**Définition 17** (Système quasi-complet d'événements).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- Soit  $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1$$

On dit alors que  $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme un système quasi-complet d'événements<sup>3</sup>.

- Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

On dit alors que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système quasi-complet d'événements.

**Proposition 7** (Extension du théorème des probabilités totales).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système quasi-complet d'événements.

Alors, pour tout événement  $E \in \mathcal{F}$

•

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap E)$$

•

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(E)$$

avec la convention que si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  alors, même si la probabilité conditionnelle n'est pas définie, on pose  $\mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(E) = 0$ .

3. on devrait préciser "... de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ "

Ce théorème s'adapte facilement au cas où le système quasi complet est fini.

**Démonstration :**

5

### III.1.a Une application

On dispose d'une infinité d'urnes numérotées  $0, 1, 2, \dots, n$ . Dans l'urne  $n$  il y a  $n + 1$  boules dont une seule est noire. On choisit une urne selon la règle : « l'urne  $n$  à la probabilité  $\frac{1}{2^{n+1}}$  d'être choisie ». Puis on choisit au hasard une boule dans l'urne  $n$ .  
Question : Quelle est la probabilité d'avoir une boule noire?  
Question subsidiaire : Comment simuler cette expérience avec python.

### III.2 Formule des probabilités composées

**Théorème 3** (Formule des probabilités composées).

Soit  $n$  un entier plus grand que 2.  
Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements tels que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_2 \cap A_1}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_{n-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1}(A_n)$$

**Démonstration :**

5

### III.3 Théorème de Bayes

#### III.3.a Un premier exemple

On dispose d'un test qui permet de détecter une maladie. Ce test fonctionne de la manière suivante :

- Si le patient testé est malade, la probabilité que le test soit positif est de 99%.
- Si le patient est sain la probabilité que le test soit positif (faux positif) est de 5%

On sait de plus qu'une personne sur 10 000 est malade.

On choisit une personne au hasard, on la teste et le test se révèle négatif. Calculer la probabilité que cette personne soit malade.

### III.3.b Le théorème

**Théorème 4** (Formule de Bayes).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(A_k) \neq 0$$

Alors pour tout événement  $E \in \mathcal{F}$  et pour tout  $i_0 \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_E(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}_{A_{i_0}}(E)\mathbb{P}(A_{i_0})}{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E)\mathbb{P}(A_k)} = \frac{\mathbb{P}_{A_{i_0}}(E)\mathbb{P}(A_{i_0})}{\mathbb{P}(E)}$$

- Soit  $(A_1; \dots; A_n)$  un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A_k) \neq 0$$

Alors pour tout événement  $E \in \mathcal{F}$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}_E(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(E)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(E)\mathbb{P}(A_k)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(E)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(E)}$$

**Démonstration :**