DM 03 séries numériques

Bio Spé

Réponses

1. Lorsque $x \in \mathbb{R}^-$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite car $((-1)^{n+1})$ n'admet pas de limite et $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ diverge vers $+\infty$ ou est constante égale à 1 pour $x=0$.

   La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est donc grossièrement divergente pour $x \in \mathbb{R}^-$.

2. Dans cette question x est un réel strictement positif.

   (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_{2(p+1)} - u_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \geqslant 0 \Rightarrow (u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}$$

   $$u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leqslant 0 \Rightarrow (u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}$$

   $$u_{2p} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} \to 0 \text{ lorsque } p \to +\infty$$

   Les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont donc bien adjacentes. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite. Notons alors $S(x)$ la limite commune aux suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) D'après la question précédente, comme les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, on peut en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   Or u_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

   Par définition, cela signifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est convergente.

   (c) Par propriété des suites adjacentes, on sait que :

   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1}.$$

   Et comme la suite $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   On a donc bien $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   (d) D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant S(x) - u_{2p} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p}$.

   Or $u_{2p-1} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+1)^x}$.

   Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant S(x) - u_{2p} \leqslant \dfrac{1}{(2p+1)^x}$.

   De même, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant S(x) - u_{2p-1} \leqslant 0$.

   Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{(2p)^x} \leqslant S(x) - u_{2p-1} \leqslant 0$.

   En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant S(x) - u_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$, c'est-à-dire

   $$|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}.$$

   (e)
```
def valeur_approchee(x,eps):
    '''étant donné x et eps réel >0, renvoie une valeur appr
    de S(x) à eps près'''
    u=1
    n=1
    while 1/(n+1)**x > eps:
        n+=1
        u+=(-1)**(n+1)/n**x
    return u
```

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{2i+1}}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{2i-1+1}}{(2i-1)^x} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{-1}{2^x i^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i^x}\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i)^x} \\ \Longrightarrow &\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i)^x} \\ \Longrightarrow &\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i^x}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k^x}-\frac{1}{2^x}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i^x}-\frac{1}{2^x}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i^x}\\ &= \sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k^x}-2\times\frac{1}{2^x}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i^x}=\sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k^x}-\frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x}\end{aligned}$$

4. (a) D'après la question précédente, utilisée avec $x=1$: $v_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
   On effectue alors le changement d'indice $i=k-n$:

   $$v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}.$$

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
   D'après la question précédente on a $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.
   La fonction f étant continue sur $[0;1]$, d'après le théorème de la moyenne (aussi appelé théorème des sommes de Riemann),

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Donc $S(1)=\lim_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(2)$.

5. D'après la question 3. utilisée avec $x=2$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}S(2) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$