DM 04 Probabilités

BCPST SPé

à rendre le 13 octobre

Sujet d'oral modifié

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile, Pile, Face », dans cet ordre.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ème lancer ».

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose :

- B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.
- A_n l'événement défini par : « la succession Pile, Pile, Face se produit pour la première fois aux lancers $n-2$, $n-1$ et n ».
- U_n l'événement défini par : « la succession Pile, Pile, Face est apparue au moins une fois au cours des n premiers lancers ».
- $u_n = P(U_n)$.

1. (a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

   (b) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui, étant donné un entier n supérieur ou égal à trois, renvoie une valeur approchée de la probabilité de l'événement A_n.

2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$.

3. (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$ et justifier rigoureusement que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

   Les événements B_n et B_{n+3} sont-ils aussi incompatibles ?

   (b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que :

   $$\forall n \geqslant 3, \qquad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_n.$$

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ converge, et calculer sa limite.

4. On considère maintenant l'événement U défini par $U = \bigcup_{k=3}^{+\infty} B_k$.

   (a) Décrire à l'aide d'une phrase en français l'événement U.

   (b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $U_n \subset U$.

   (c) En déduire la valeur de $P(U)$.

Sujet original

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile, Pile, Face », dans cet ordre. On note X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1.

Pas exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ème lancer ».

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose :

- B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.
- U_n l'événement défini par : $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$.
- $u_n = P(U_n)$.

1. (a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

   (b) Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

2. (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$ et justifier que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

   (b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geqslant 3$, $u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_n$.

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ converge, et calculer sa limite. En déduire la valeur de $P(X = -1)$.

   On pourra remarquer que $U_n \subset \bigcup_{k=3}^{+\infty} B_k$ pour établir une inégalité liant $P(X = -1)$ et u_n.

3. On admettra dans cette question le résultat suivant :

   Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme général $P(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance, et

   $$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n).$$

   Pour tout entier naturel b, on note $v_n = P(X > n)$.

   (a) Donner la valeur de v_0, v_1, v_2 et v_3.

   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8} v_n$.

   (c) Montrer que X admet une espérance, et déterminer cette espérance.