Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1

1. a) L'équation homogène associée à (E) est :

$$x'(t) + x(t) = 0 \tag{H}$$

C'est une équation homogène, du premier ordre à coefficient constant, on peut la résoudre [1] sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de (H) sont les fonctions } t \mapsto K\mathrm{e}^{-t} \text{ où } K \text{ est un réel quelconque.}}$$

b) Soit a et b deux réels, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction y_p par

$$y_p \ : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$$

Cette fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_p'(t) = (-at + a - b)\mathrm{e}^{-t}$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_p(t) + y_p'(t) = a\mathrm{e}^{-t}$$

Il suffit donc de choisir par exemple $a = 1$ et $b = 0$ pour obtenir une solution particulière de l'équation (E).

$$\boxed{t \mapsto t\mathrm{e}^{-t} \text{ est une solution particulière de (E) sur } \mathbb{R}.}$$

c) En utilisant le théorème de structure :

$$\boxed{\text{Les solutions de (E) sont les fonctions } t \mapsto (t+K)\mathrm{e}^{-t} \text{ où } K \text{ est un réel quelconque.}}$$

Remarque si on n'impose pas que la constante b soit nulle dans la solution "particulière" on retrouve directement toutes les solutions.

2. a) Soit (x, y) une solution de (S) avec conditions initiales y vérifie

$$y' = -y \qquad y(0) = 1$$

On sait donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

Donc x vérifie :

$$x'(t) + x(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad x(0) = 1$$

D'après la question précédente, il existe K un réel tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = (t+K)\mathrm{e}^{-t}$$

Donc en utilisant la condition initiale

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-t}$$

Il est facile de de vérifier que

$$t \mapsto \big((t+1)\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{-t}\big)$$

est bien solution de (S) avec les conditions initiales données.

1. on peut aussi indiquer que $t \mapsto 1$ est une fonction continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{L'unique solution cherchée est } \mapsto \big((t+1)\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{-t}\big).}$$

b) En $+\infty$ les formes indéterminées se lèvent directement avec le théorèmes des croissances comparées.

$$\boxed{\text{Pour cette solution, } \lim_{+\infty} x(t) = \lim_{+\infty} x(t) = 0}$$

3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ (t+1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [ np.exp(-t) for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( x,y)
plt.show()
```

Exercice 2 : Agro-véto 2016

1. a) La fonction $\varphi\ : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient défini de fonction dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $1 - \ln x$:

x	0		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

La limite en 0 s'obtient par simple opération sur les limites, la limite en $+\infty$ est une limite faisant partie des règles des croissances comparées.

b) Soit k un entier supérieur à 4 ; on a alors $\mathrm{e} \leqslant k-1 \leqslant k$. D'après la question précédente la fonction φ est décroissante sur les intervalles $[k-1,\ k]$ et $[k,\ k+1]$.

$$\forall x \in [k-1,\ k] \qquad \varphi(k) \leqslant \varphi(x) \qquad \forall x \in [k,\ k+1] \qquad \varphi(x) \leqslant \varphi(k)$$

En utilisant la croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \varphi(k)\mathrm{d}x \qquad \int_k^{k-1} \varphi(k)\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

En intégrant des constantes

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\},\ \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\ .}$$

c) Soit $n \in N \setminus \{0,1,2,3\}$, en sommant les inégalité précédentes :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$$

La relation de Chasles [2] permet d'écrire

2. On peut aussi calculer les intégrales et faire apparaître des sommes télescopiques

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$$

On remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln x$ est de la forme $u'u$ avec $u\ : x \mapsto \ln x$

$$\begin{aligned}\int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_4^{n+1}\\ &= \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(4))^2}{2}\\ &= \frac{\ln^2(n+1)}{2} - 2\ln^2(2)\\ \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(1)}{1} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3}\\ &= S_n - \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2,3\},\ \frac{\ln^2(n+1)}{2} - 2\ln^2(2) \leqslant S_n - \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}\right) \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}.}$$

d) Comme $\lim\limits_{+\infty} \ln^2(n+1) = +\infty$, en utilisant le théorème des gendarmes et l'inégalité précédente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

Autre démonstration possible On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$$

On sait aussi que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente, donc en utilisant les théorèmes du cours, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n}$ diverge vers $+\infty$ ce qui démontre que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\ln(n+1) &= \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(n)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)\end{aligned}$$

Un calcul rapide (sans forme indéterminée) montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$$

donc

$$\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

La relation $\sim$ étant compatible avec le produit :

$$\boxed{\ln^2(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln^2(n)}$$

Remarque : le calcul précédent est classique et permet de démontrer que $\ln(1+n) \sim_{+\infty} \ln(n)$. Ce dernier résultat, très souvent utile, ne peut pas être affirmé sans démonstration.

b) On déduit de l'inégalité prouvée à la question 1c) et du fait que ln est strictement positif sur $]1,\ +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\} \qquad \frac{\dfrac{\ln^2(n+1)}{2} - A}{\dfrac{\ln^2(n)}{2}} \leqslant \frac{S_n - B}{\dfrac{\ln^2(n)}{2}} \leqslant \frac{\dfrac{\ln^2(n)}{2} - C}{\dfrac{\ln^2(n)}{2}}$$

D'après l'équivalent et le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - B}{\dfrac{\ln^2(n)}{2}} = 1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\dfrac{\ln^2(n)}{2}} = 1$$

$$\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.}$$

Remarque on peut faire ce calcul même si on ne connaît pas les valeurs des constantes A, B et C ou si on a trouvé des valeurs fausses. Il ne faut pas hésiter à admettre des résultats pour continuer.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \end{aligned}$$

Soit n un entier plus grand que 3, alors $n+1$ est plus grand que 4 et on peut utiliser le résultat de la question 1b)

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$

et en calculant l'intégrale

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2}$$

Ce qui démontre que

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ plus grand que 3, } u_{n+1} - u_n \leqslant 0.}$$

b) On vient de démontrer que la suite u est décroissante à partir du rang 3. De plus le résultat de la question 1c) démontre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\} \qquad \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)}{2} + B - A \leqslant S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$$

Comme ln est une fonction croissante et positive sur $[1,\ +\infty]$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\} \qquad 0 \leqslant \ln^2(n+1) - \ln^2(n)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\} \qquad B - A \leqslant S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$$

La suite u est décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ converge vers une limite que l'on note } \ell.}$$

4. Soit n un entier naturel non nul ;

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k \in [\![1\,,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1\,,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
&= -2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} \\
&= -2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(2k)}{2k} && \text{on rassemble les termes pairs/impairs} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + S_{2n} && \text{propriétés du ln}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ A_{2n} = S_{2n} - S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)}{k}.}$$

5. D'après la question 3b, au voisinage de $+\infty$

$$S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$$

donc

$$S_{2n} = \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1)$$

On a donc au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ell - \ln(2)\left(\ln n + \gamma\right) + o(1) \\
&= \frac{\left(\ln(2) + \ln(n)\right)^2 - \ln^2(n) - 2\ln(2)\ln(n)}{2} - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma + o(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

6. On constate que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

Le théorème des croissances comparées permet d'affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$$

donc

$$\boxed{\text{La suite } (A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

7.

$$\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma$$

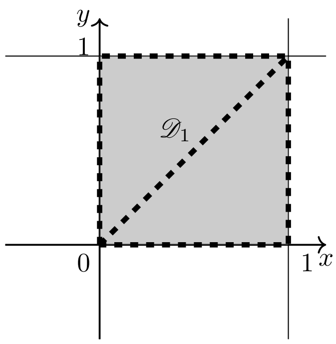
Le théorème sur les suites extraites de rangs pairs et impairs affirme

$$\boxed{\text{La suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

Problème : G2E 2018

Partie A : Étude de trois fonctions

1. a) On a $\boxed{\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in]0;1[^2 \ / \ x \neq y\}}$, que l'on peut représenter comme ceci :



b) On a : $\mathscr{D}_2 = \{x \in]0;1[/ x \neq 1-x\}$ donc $\boxed{\mathscr{D}_2 = \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[}$.

2. a) Pour tout $(x,y) \in]0;1[^2$:

$$\boxed{\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y}(x,y) = x^k - ky^{k-1}x.}$$

De plus, la fonction h_k est la composée de f_k avec les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1-x$, donc d'après la formule de dérivation des composées, on a :
pour tout $x \in]0;1[$, $h_k'(x) = 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,1-x) + (-1) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,1-x)$, d'où :

$$h_k'\left(\frac{1}{2}\right) = k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \boxed{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}.$$

b) On peut remarquer que $h_k\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et donc

$$\varphi_k(x)=\frac{h_k(x)}{2x-1}=\frac{1}{2}\times\frac{h_k(x)-h_k\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}.$$ (On fait apparaitre le taux d'accroissement de h_k en $\frac{1}{2}$)

D'après la question précédente, h_k est dérivable en $\frac{1}{2}$ et son nombre dérivé vaut $(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}}\varphi_k(x)=\frac{1}{2}h_k'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{k-1}{2^k}.}$

c) La fonction φ_k est maintenant continue en $\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\varphi_k(x)=\frac{k-1}{2^k}}$.

3. a) Pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2^k}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.\end{aligned}$$

On reconnait les sommes partielles d'une série géométrique et de sa série dérivée. Comme $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, ces deux séries sont convergentes.
Donc $\sum\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)$ est convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2-1=1.$$

Considérons maintenant $x\neq\frac{1}{2}$. Pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k(1-x)-x(1-x)^k}{2x-1}\\&=\frac{1-x}{2x-1}\sum_{k=1}^{n}x^k-\frac{x}{2x-1}\sum_{k=1}^{n}(1-x)^k.\end{aligned}$$

On reconnait les sommes partielles de deux séries géométriques. Comme $|x|<1$ et $|1-x|<1$, ces deux séries sont convergentes. Donc $\sum\varphi_k(x)$ est convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k(x)=\frac{1-x}{2x-1}\times\frac{x}{1-x}-\frac{x}{2x-1}\times\frac{1-x}{1-(1-x)}=1.$$

b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:
Pour $x=\frac{1}{2}$ on vérifie facilement la relation demandée (on vous laisse le faire !), et pour $x\neq\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(x)&=\frac{x^{k+1}(1-x)-x(1-x)^{k+1}}{2x-1}\\&=x\times\underbrace{\frac{x^k(1-x)}{2x-1}}_{\varphi_k(x)+\frac{x(1-x)^k}{2x-1}}-(1-x)\times\frac{x(1-x)^k}{2x-1}\\&=x\varphi_k(x)+x\times\frac{x(1-x)^k}{2x-1}-(1-x)\times\frac{x(1-x)^k}{2x-1}\\&=x\varphi_k(x)+x(1-x)^k.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu partir de $x\varphi_k(x)+x(1-x)^k$.

Partie B : Temps d'attente

1. a) Le fait d'avoir obtenu 7 à l'écran signifie qu'on a obtenu pour la première fois le motif ppf au septième tirage. La variable `tirage` contient donc une chaine de 7 caractères finissant par ppf et n'ayant pas ce motif parmi les 4 premiers tirages.

   On a par exemple pu avoir `tirage='fpffppf'`.

   Pour obtenir ce résultat les valeurs de `random` ont par exemple été :

$$0.52,\ 0.31,\ 0.84,\ 0.65,\ 0.12,\ 0.42,\ 0.71$$

   (face correspond à un random supérieur à 0,45 et pile à un random inférieur à 0,45)

   b)
```
def proba(motif,a):
    k=len(motif)
    p=0
    for _ in range(1000):
        if temps_d_attente(motif,a)==len(a):
            p+=1
    return p/1000
```

   c)
```
def temps_d_attente_bis(motif,a):
    lm=len(motif)
    tirage = ''  # chaine vide
    while True:
        tirage += lancer_piece(a)
        if tirage[-lm :] == motif:
            return len(tirage)
            # lorsque le motif est obtenu, le return interrompt la boucle while
```

2. a) (i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{Y_k = \mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_{k-1} \cap \mathrm{p}_k.}$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(Y_k) &= P(\mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_{k-1} \cap \mathrm{p}_k) \\
&= P(\mathrm{f}_1) \times P(\mathrm{f}_2) \times \ldots \times P(\mathrm{f}_{k-1}) \times P(\mathrm{p}_k) && \text{car lancers indépendants} \\
&= \boxed{(1-a)^{k-1}a}.
\end{aligned}$$

   (ii) Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$, on a $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ car il est impossible que le premier pile apparaisse à deux numéros de lancers différents.

   De plus, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y_k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a(1-a)^{k-1} \\
&= a\sum_{j=0}^{+\infty}(1-a)^j && \text{on a posé } j = k-1 \\
&= a \times \frac{1}{1-(1-a)} && \text{somme de série géométrique, convergente car } |1-a| < 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   $\boxed{(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien un système quasi-complet d'événements.}}$

   (iii) — Première méthode : $P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = \dfrac{P(\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1})}{P(\mathrm{f}_1)}$.

   Or $\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1} = \mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}$ car avec face au premier tirage, le premier pile qui est obtenu réalise le motif fp.

   Comme les lancers sont mutuellement indépendants, on a :

   $P(\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1}) = P(\mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) = (1-a)^k a$.

   D'où $P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = \dfrac{(1-a)^k a}{1-a} = (1-a)^{k-1}a = P(Y_k)$.

— <u>Deuxième méthode :</u> comme ci-dessus, sachant que l'on obtient face au premier lancer, l'événement T_{k+1} est l'événement $\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) &= P_{\mathrm{f}_1}(\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) \\ &= P(\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) \text{ car les lancers 2,3 ... } k{+}1 \text{ sont indépendants du premier lancer} \\ &= (1-a)^{k-1}a \\ &= P(Y_k). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $\boxed{P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = P(Y_k).}$

(iv) Les événements $(\mathrm{p}_1, \mathrm{f}_1)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T_{k+1}) &= P(\mathrm{p}_1)P_{\mathrm{p}_1}(T_{k+1}) + P(\mathrm{f}_1)P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) \\ &= aP_{\mathrm{p}_1}(T_{k+1}) + a(1-a)^k \end{aligned}$$

Comme le motif 'fp' ne commence pas par 'p', le fait d'imposer d'avoir obtenu pile au premier lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement T_{k+1} sachant p_1 revient donc à calculer la probabilité de l'événement T_k : le temps d'attente est compté à partir du deuxième lancer.

On obtient donc bien $\boxed{P(T_{k+1}) = a(1-a)^k + aP(T_k)}$.

(v) On a vu dans la partie A, que φ_k vérifie : $\varphi_{k+1}(a) = a(1-a)^k + a\varphi_k(a)$.

Donc d'après la question précédente, les deux suites $(P(T_k))_{k\geqslant 1}$ et $(\varphi_k(a))_{k\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence.

De plus, pour $k = 1$, on a $P(T_1) = 0$ (il est impossible d'obtenir le motif fp après un seul lancer) et on a aussi $\varphi_1(a) = 0$ (car $f_1(x, y) = xy - xy = 0$).

Les deux suites vérifient donc la même relation de récurrence et la même condition initiale, on peut donc affirmer qu'elles sont égales (par récurrence immédiate).

Ainsi $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T_k) = \varphi_k(a)}$.

b) Notons M l'événement le motif fp apparait lors de l'expérience.

On a $M = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_k$. Les événements $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant incompatibles deux à deux, on a donc d'après l'axiome de σ-additivité :

$$P(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(a) = 1,$$

d'après la question A. 3. a).

$\boxed{\text{Il est donc presque sûr que le motif fp apparaisse lors de l'expérience.}}$

c) La famille d'événements $(\mathrm{f}_1, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z_{k+2}) &= P(\mathrm{f}_1)P_{\mathrm{f}_1}(Z_{k+2}) + P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2)\underbrace{P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{p}_2}(Z_{k+2})}_{=0} + P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{f}_2}(Z_{k+2}) \\ &= (1-a)P_{\mathrm{f}_1}(Z_{k+2}) + a(1-a)P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{f}_2}(Z_{k+2}). \end{aligned}$$

$P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{p}_2}(Z_{k+2}) = 0$ car sachant que les deux premiers lancers ont donné pile, on a Z_2 (et non pas Z_{k+2}).

D'autre part, comme au 2. a) iii. (ici 'pp' ne commence pas par 'f') le fait d'imposer d'avoir obtenu face au premier lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement Z_{k+2} sachant f_1 revient donc à calculer la probabilité de l'événement Z_{k+1}.

De même, le fait d'imposer d'avoir obtenu pile puis face aux deux premiers lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement Z_{k+2} sachant $\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2$ revient donc à calculer la probabilité de l'événement Z_k : ici le temps d'attente est compté à partir du troisième lancer.

On obtient donc bien $\boxed{P(Z_{k+2}) = (1-a)P(Z_{k+1}) + a(1-a)P(Z_k)}$.

d) (i) Le discriminant de l'équation est : $\Delta = (1-a)^2 + 4a(1-a) > 0$.

Donc $\boxed{\text{l'équation } x^2 - (1-a)x - a(1-a) = 0 \text{ admet deux racines réelles distinctes.}}$

(ii) Comme $(x-r_1)(x-r-2) = x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2$, et que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux, on en déduit que $\boxed{r_1+r_2 = 1-a}$ et $\boxed{r_1r_2 = -a(1-a)}$.

(iii) Notons donc $h : x \mapsto x^2-(1-a)x-a(1-a)$.
On remarque que h est continue sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty;-1]$, croissante sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$ et de plus $h(1) = a^2 > 0$ et $h(-1) = 2(1-a)+a^2 > 0$.
Donc h ne s'annule pas sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$. $\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont dans }]-1;1[.}$

e) La suite $(P(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée est $r^2-(1-a)r-a(1-a) = 0$.
D'après la question précédente, cette équation admet deux racines réelles distinctes, r_1 et r_2, donc on sait qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(Z_k) = \lambda r_1^k+\mu r_2^k.}$$

f) Le motif pp ne peut pas apparaitre dès le premier lancer donc $\boxed{P(Z_1) = 0}$.
Le motif pp apparait au deuxième lancer signifie que les deux premiers lancers ont donné pile donc $\boxed{P(Z_2) = a^2}$.
En appliquant la relation de la question précédente pour $k = 1$, on obtient $\boxed{\lambda r_1+\mu r_2 = 0}$.
En appliquant la relation de la question précédente pour $k = 2$, on obtient $\lambda r_1^2+\mu r_2^2 = a^2$.
En exploitant les deux relations on a :

$$\begin{aligned}
&\lambda r_1\times r_1+\mu r_2\times r_2 = a^2\\
\Rightarrow&(-\mu r_2)\times r_1+(-\lambda r_1)\times r_2 = a^2\\
\Rightarrow&\mu+\lambda = -\frac{a^2}{r_1r_2} = \frac{a}{1-a}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lambda+\mu = \dfrac{a}{1-a}}$.
On multiplie alors la relation précédente par r_1+r_2 :

$$\begin{aligned}
&\lambda(r_1+r_2)+\mu(r_1+r_2) = \frac{a}{1-a}\times(1-a)\\
\Rightarrow&\underbrace{(\lambda r_1+\mu r_2)}_{=0}+(\lambda r_2+\mu r_1) = a\\
\Rightarrow&\lambda r_2+\mu r_1 = a.
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\lambda r_2+\mu r_1 = a}$.

g) La série géométrique $\sum r_1^k$ est convergente car $|r_1| < 1$ et de même la série $\sum r_2^k$ est convergente. Donc $\sum P(Z_k)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) &= \lambda\times\frac{r_1}{1-r_1}+\mu\times\frac{r_2}{1-r_2}\\
&= \frac{\lambda r_1(1-r_2)+\mu r_2(1-r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)}\\
&= \frac{\lambda r_1+\mu r_2-r_1r_2(\lambda+\mu)}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}\\
&= \frac{a(1-a)\frac{a}{1-a}}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) = 1}$.

On peut en conclure que $\boxed{\text{le motif pp apparait presque sûrement au cours de l'expérience}}$ ou encore que $\boxed{(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est un système quasi-complet d'événements.}}$

3. a) Il faut mettre `while tirage[-lm1 :] != motif1 and tirage[-lm2 :] != motif2:` En effet, la boucle doit s'arrêter dès que l'un des deux booléens prend la valeur `False`, ce qui signifie que l'un des deux motifs est réalisé.

b) La troisième fonction est bien correcte : on effectue N fois un match et pour chaque match on augmente `f1` de 1 si le joueur 1 a gagné et on augmente `f2` de 1 si le joueur 2 a gagné.
La deuxième fonction n'est pas correcte : la première valeur retournée sera bien la valeur attendue pour le joueur 1, mais pas la seconde. En effet quand on passe dans le `elif`, il y a un nouvel appel de la fonction `match_a_2` et donc `f2` ne s'incrémentera pas forcément (alors qu'il le devrait, comme c'est le cas dans la troisième fonction). Ainsi la seconde valeur retournée sera inférieure à ce qu'elle devrait être.
La première fonction est correcte dans le sens où les valeurs retournées sont bien celles attendues, mais comme à chaque passage dans la boucle, on effectue deux fois un appel de la fonction `match_a_2`, c'est comme si on calculait indépendamment les fréquences de réalisation des 2 événements : "le joueur 1 gagne" et "le joueur 2 gagne" (on n'aura donc pas forcément `f1+f2=N` contrairement à la troisième fonction).

c) (i) La seule façon d'obtenir le motif p strictement avant le motif fp est d'obtenir pile au premier lancer.
Donc $\boxed{P(A) = a}$.
Comme les motifs p et fp apparaissent presque sûrement on a $P(A \cup B) = 1$.
De plus les événements A et B sont incompatibles par définition, donc $P(A) + P(B) = 1$ et on en déduit que $\boxed{P(B) = 1 - a}$.

(ii) Bérénice a donc une probabilité de victoire plus grande qu'Alice lorsque $a < \dfrac{1}{2}$.

(iii) Dans la fonction `match_a_2`, dans le cas où les motifs apparaissent au même instant, c'est `'le joueur 1 gagne'` qui est retourné. Ainsi, pour simuler le match entre Alice et Bérénice, Bérénice doit être le joueur 1 et Alice le joueur 2. Il faut donc entrer $\boxed{\texttt{match\_a\_2('fp','p',0.45)}}$.

d) (i) Comme les motifs pp et fp apparaissent presque sûrement on a $P(B' \cup C) = 1$.
De plus les événements B' et C sont incompatibles car les motifs fp et pp ne peuvent pas apparaitre au même moment.
Donc $\boxed{\text{la famille d'événement } (B', C) \text{ est un système quasi-complet d'événements}}$.

(ii) La seule façon d'obtenir le motif pp avant le motif fp est d'obtenir pile aux deux premiers lancers car sinon, dès que l'on obtient un face au premier ou au deuxième lancer, le motif fp apparaitra nécessairement avant le motif pp.
Donc $\boxed{P(C) = P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2) = a^2}$.
Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice si, et seulement si $a^2 < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire, $\boxed{a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

4. a) Dans cette question il s'agit de montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} kP(T_k) = \sum_{k\geqslant 1} k\varphi_k(a)$.
Cas où $a = \dfrac{1}{2}$: sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{k-1}{2^k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &\quad \text{somme de série dérivée seconde de série géométrique, convergente car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.\end{aligned}$$

Cas où $a \neq \frac{1}{2}$: sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k(a) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{a^k(1-a)-a(1-a)^k}{2a-1} \\
&= \frac{(1-a)a}{2a-1}\sum_{k=1}^{+\infty} ka^{k-1} - \frac{a(1-a)}{2a-1}\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-a)^{k-1} \\
&\text{somme de séries dérivée de séries géométriques, convergentes car } |a|<1 \text{ et } |1-a|<1 \\
&= \frac{a(1-a)}{2a-1} \times \left(\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-(1-a))^2}\right) \\
&= \frac{a(1-a)}{2a-1} \times \frac{2a-1}{a^2(1-a)^2} = \frac{1}{a(1-a)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} kP(T_k) \text{ est convergente et } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(T_k) = \frac{1}{a(1-a)}.}$ (La formule fonctionne pour $a = \frac{1}{2}$.)

b) On a $kP(Z_k) = \lambda r_1 \times kr_1^{k-1} + \mu r_2 \times kr_2^{k-1}$, or les séries $\sum kr_1^{k-1}$ et $\sum kr_2^{k-1}$ sont convergentes car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ (séries géométriques dérivées). Donc $\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_k)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_k) &= \lambda r_1 \times \frac{1}{(1-r_1)^2} + \mu r_2 \times \frac{1}{(1-r_2)^2} \\
&= \frac{\lambda r_1(1-r_2)^2 + \mu r_2(1-r_1)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\
&= \frac{\lambda r_1 + \mu r_2 - 2r_1r_2(\lambda+\mu) + r_1r_2(\lambda r_2 + \mu r_1)}{a^4} \\
&= \frac{2a^2 - a^2(1-a)}{a^4} = \frac{1+a}{a^2}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_k) \text{ est convergente } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_k) = \frac{1+a}{a^2}}$.

c) Le temps d'attente moyen du motif f p est $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(T_k)$ et le temps d'attente moyen du motif p p est $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_k)$.

Donc le temps d'attente moyen du motif f p est supérieur au temps d'attente moyen du motif p p si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\frac{1+a}{a^2} \leqslant \frac{1}{a(1-a)} \\
\Leftrightarrow &\frac{1-a^2}{a} \leqslant 1 \\
\Leftrightarrow &a^2 + a - 1 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Le trinôme $a^2 + a - 1$ a deux racines réelles $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 > \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ donc puisque $a > 0$, on obtient que $a^2 + a - 1 \geqslant 0$ si, et seulement si, $a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Or on a $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}(*)$ donc il est possible de prendre a tel que $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour une telle valeur de a, la victoire de Bérénice est plus probable que celle de Candice bien que le temps d'attente moyen du motif fp soit supérieur au temps d'attente moyen du motif pp !!

Preuve de $(*)$ (sans calculatrice !) : en élevant au carré les deux termes (positifs), on obtient : $\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1}{2}$ ou encore $2 < \sqrt{5}$ qui est vrai puisque $4 < 5$.