DM 03 séries

BCPST Spé 2

Réponses

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème des séries alternées :

Théorème 1.
si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0, alors la suite (S_n) définie pour $n \geq 0$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

est convergente.

Puis de s'en servir pour calculer une somme classique.
On pose pour $n \geq 0$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = S_{2n+2} &= S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= u_n - a_{2n+1} + a_{2n+2} \qquad \text{parité} \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, $-a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0$

La suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} = S_{2n+3} &= S_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} \\ &= v_n + a_{2n+2} - a_{2n+3} \qquad \text{parité} \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, $a_{2n+2} - a_{2n+2} \geqslant 0$

La suite (v_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1}$$

donc par hypothèse

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

$$\boxed{\text{Les deux suites sont adjacentes}}$$

*

2. En déduire que la suite (S_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

RÉPONSE:

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, d'après le théorème du cours, elles convergent vers le même réel ℓ.

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ell$$

En utilisant le théorème du cours sur les suites extraites

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } (-1)^n a_n \text{ converge.}}$$

Remarque : Ce raisonnement ne nous donne pas la valeur de ℓ.

*

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.

RÉPONSE:

La suite (u_n) est décroissante et tend vers ℓ, ses terme sont plus grands que sa limite.
Remarque : Le raisonnement précédent suffit, voici comment démontrer ce résultat. Supposons q'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} < \ell$, alors comme la suite est décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant u_{n_0}$$

En passant les inégalité à la limite

$$\ell \leqslant u_0$$

ce qui est contradictoire.
Comme (v_n) est une suite croissante qui tend vers ℓ, ses termes sont plus petits que la limite.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \leq \ell \leq u_n.}$$

*

4. On suppose pour toute la suite de l'exercice que $a_n = \frac{1}{n+1}$. Donner une fonction en python `approx(eps)` donnant un encadrement de ℓ d'amplitude inférieur ou égal à eps.

RÉPONSE:

```python
def approx(eps):
        u=1
        v=1-1/2
        i=0
        while abs(u-v)>eps:
                i=i+1
                u=v+1/(2*i+1)
                v=u-1/(2*i+2)
        return v,u


from numpy import log
print(approx(10**-5))
print(log(2))
```

On obtient

```
>(0.6931421805849816, 0.6931521805849815)
>0.6931471805599453
```

*

5. Dans cette question, on va prouver que $\ell = \ln 2$.
   (a) Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, justifier l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-x)^n &= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} && \text{car } -x \neq 1\\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 1 \text{ et } x \in [0,1], \text{ justifier l'égalité } \frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.}$$

*

   (b) On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

   Démontrer que (I_n) tend vers 0.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}$$

On prouve donc, en calculant l'intégrale, que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+2}$$

En utilisant le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

*

(c) Conclure.

RÉPONSE:

On intègre l'égalité obtenue en 5a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^n + (-1)^{n+1} I_n$$

donc

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} I_n$$

En utilisant la question précédente

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.}$$

*