Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

18 octobre 2025

Durée de l'épreuve : 4h

Le devoir comporte deux exercices et un problème indépendants.
La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés ***à l'aide d'une règle****.*

Exercice 1 : Système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t} \tag{E}$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

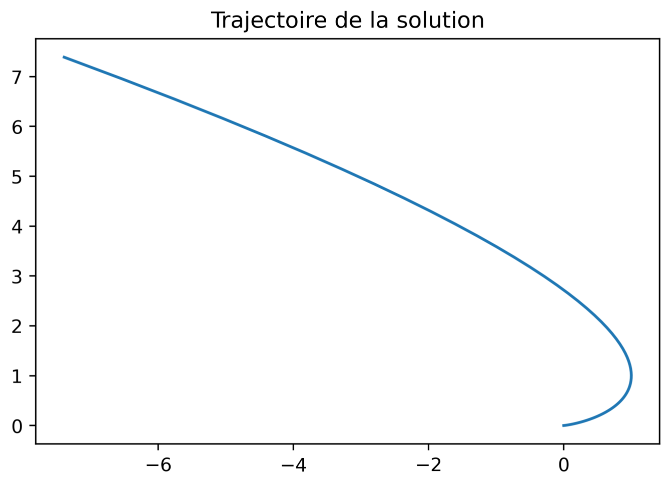
1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   c) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
2. On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & = -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = -y(t) \end{array}\right. \tag{S}$$

   où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   a) En utilisant les résultats de la question 1, déterminer l'unique solution de (S) qui vérifie $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.
   b) Pour cette solution, calculer les limites de $x(t)$, $y(t)$ en $+\infty$.
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique ci-dessous la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2,\ 10]$.
   On rappelle que la commande `np.linspace (-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10 et que la fonction exponentielle est disponible dans le module `numpy` sous le nom `exp`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Exercice 2 : Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. **Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. On donnera les limites aux bords de l'ensemble de définition.

   b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4 , on a :

   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 , on ait :

   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leqslant S_n - B \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

   On rappelle que $\ln^2(n) = (\ln(n))^2$.

   d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. **Recherche d'un équivalent de S_n.**

   a) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.

   b) En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.

3. **Étude asymptotique de la suite u définie par :**

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

   a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à $3, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   b) En déduire que la suite u converge.

Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ.

4. **Une application.**

   On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$.

   a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a

   $$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

   c) En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

   d) Que peut-on en déduire au sujet de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Problème

Dans la partie A, on considère deux fonctions réelles de deux variables réelles à partir desquelles on construit une fonction réelle d'une seule variable réelle dont on cherche la limite en $\dfrac{1}{2}$. Cette dernière fonction est réutilisée dans la partie B où on étudie une expérience aléatoire.

Ces deux parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Étude de trois fonctions

Soit k un entier naturel non nul.

On considère la fonction de 2 variables f_k définie sur $]0,1[^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \quad f_k(x,y) = x^k y - x y^k.$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies par :

$$g_k(x,y) = \frac{f_k(x,y)}{x-y}, \quad \varphi_k(x) = g_k(x, 1-x).$$

On note $\mathscr{D}_1$ le domaine de définition de g_k.

1. a) Expliciter l'ensemble $\mathscr{D}_1$ et le représenter à l'aide d'un schéma.
   b) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_2$ de la fonction d'une variable φ_k.
2. Dans cette question, on cherche la limite de φ_k en $\dfrac{1}{2}$.
   a) Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x,y) \in]0,1[^2$ et en déduire le nombre dérivé de la fonction $h_k : x \mapsto f_k(x, 1-x)$ en $\dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire que :
   $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$
   c) On peut ainsi prolonger φ_k par continuité en $\dfrac{1}{2}$. Dorénavant, on confond φ_k avec son prolongement par continuité.
   Que vaut alors $\varphi_k\left(\dfrac{1}{2}\right)$?
3. Soit $x \in]0,1[$.
   a) Justifier que la série de terme général $\varphi_k(x)$ est convergente puis que :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = 1.$$
   On sera amené à faire deux cas selon que $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x \neq \dfrac{1}{2}$.
   b) Établir la relation de récurrence :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).$$

Partie B : temps d'attente

Soit une pièce de monnaie pouvant tomber sur pile avec la probabilité $a \in]0,1[$ et sur face avec la probabilité $1-a$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer indéfiniment cette pièce. Ces lancers sont supposés mutuellement indépendants. En notant simplement p pour pile et f pour face, on obtient ainsi une suite à valeurs dans {p, f}. Par exemple :

f f p p p f f p p f . . .

Dans cette partie on s'intéresse au nombre de lancers effectués pour qu'un certain motif apparaisse pour la première fois (temps d'attente du motif). Ainsi, pour le motif p p f , et pour la suite donnée en exemple le temps d'attente est 6. **On fera bien attention : le temps d'attente correspond au rang d'apparition du dernier caractère du motif.**

On étudie dans un premier temps une modélisation informatique de l'expérience aléatoire, puis on étudie les temps d'attente pour les motifs p , f p et p p . Enfin on s'intéresse à un match entre deux joueurs : chacun choisit un motif et celui dont le motif sort en premier gagne.

1. **Modélisation informatique.**

   On modélise dans python une suite à valeurs dans {p, f} par une chaine de caractères : `'ffpppffppf'`.

   Quelques rappels sur les chaines de caractères en python :

   — somme de deux chaines : `'ebd'+'et'` renvoie la chaine `'ebdet'`.

   — longueur d'une chaine : `len('ebdet')` renvoie 5 (nombre de caractères de la chaine).

   — `'ebdet'[2]` renvoie `'d'` (élément d'indice 2 dans la chaine `'ebdet'`).

   — `'ebdet'[-3 :]` renvoie `'det'` (chaine formée des 3 derniers éléments de la chaine initiale).

   — `'ebdet'[-7 :]` renvoie `'ebdet'` (comme la chaine initiale a moins de 7 éléments, la chaine entière est renvoyée).

   On considère que l'on a exécuté le programme python ci-dessous :

```
from random import random

def lancer_piece(a):
    if random() < a:
        return 'p'
    else:
        return 'f'

def temps_d_attente(motif,a):
    lm=len(motif)
    tirage = ''  # chaine vide
    while tirage[-lm :] != motif:
        tirage += lancer_piece(a)
    return len(tirage)
```

   a) On suppose que `temps_d_attente('ppf',0.45)` a donné à l'écran la valeur 7. Donner un contenu possible de la variable `tirage` au moment de ce retour ainsi que des valeurs successives fournies par `random()` dans la fonction `lancer_piece` (on donnera des valeurs avec une ou deux décimales).

   b) Écrire une fonction `proba(motif,a)` qui calcul une estimation de la probabilité que le motif apparaissent au premier rang où cela est possible.

   c) Écrire une seconde version de la fonction `temps_d_attente` dans laquelle la boucle commence par :

```
....  # (partie identique à la première version)
while True :
  ..... # (partie à compléter)
```

2. **Étude mathématique de trois temps d'attente.**

   Notations :

   — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k désigne l'événement "pile apparaît au k-ième lancer" et f_k l'événement "face apparaît au k-ième lancer".

   — Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k l'événement "le motif p apparaît pour la première fois au rang k" (dans l'exemple proposé plus haut, on a Y_3 est réalisé, Y_2 n'est pas réalisé et Y_4 n'est pas réalisé).

   — Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note T_k l'événement "le motif f p apparait pour la première fois au rang k" (dans l'exemple, on a également T_3 est réalisé).

   — Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note Z_k l'événement "le motif p p apparait pour la première fois au rang k" (dans l'exemple, on a également Z_4 est réalisé).

   a) (i) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer Y_k en fonction des p_i et des f_i. En déduire une expression de $P(Y_k)$.

   (ii) Démontrer que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.

   (iii) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = P(Y_k)$.

   (iv) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{p}_1, \mathrm{f}_1)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T_{k+1}) = a(1-a)^k + aP(T_k).$$

   (v) φ_k désignant la fonction introduite dans la partie A, en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T_k) = \varphi_k(a).$$

b) Justifier que l'événement "le motif f p apparaît au cours de l'expérience" est presque sûr.

c) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{f}_1, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z_{k+2}) = (1-a)P(Z_{k+1}) + a(1-a)P(Z_k).$$

d) (i) On rappelle que $a \in]0,1[$.
Démontrer que l'équation du second degré $x^2 - (1-a)x - a(1-a) = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
Il est ***déconseillé*** *d'expliciter les racines r_1 et r_2 pour cette question et les suivantes.*

(ii) On peut donc écrire $x^2 - (1-a)x - a(1-a) = (x-r_1)(x-r_2)$.
Exprimer alors $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de a.

(iii) En étudiant la fonction $h :\ x \mapsto x^2 - (1-a)x - a(1-a)$, montrer que r_1 et r_2 appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

e) Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z_k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

f) Calculer $P(Z_1)$ et $P(Z_2)$ et en déduire que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$, $\lambda + \mu = \dfrac{a}{1-a}$ et $\lambda r_2 + \mu r_1 = a$.

g) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

3. **Match entre deux joueurs.**

La fonction python ci-dessous modélise le déroulement d'un match entre deux joueurs dans lequel on suppose que les deux motifs ne peuvent pas apparaître pour la première fois en même temps.

```
def match_a_2(motif1,motif2,a):
    lm1=len(motif1)
    lm2=len(motif2)
    tirage = ''
    while tirage[-lm1 :] != motif1 .... tirage[-lm2 :] != motif2:
        tirage += lancer_piece(a)
    if tirage[-lm1 :] == motif1:
        return 'le joueur 1 gagne'
    else:
        return 'le joueur 2 gagne'
```

a) Dans la ligne du `while`, que faut-il mettre à la place des `....` ?

Voici trois propositions de fonctions python dont le but est d'évaluer numériquement les probabilités pour les deux joueurs de gagner le match.

```
def proba_victoire1(motif1,motif2,a,N):
    f1,f2=0,0
    for i in range(N):
        if match_a_2(motif1,motif2,a) == 'le joueur 1 gagne':
            f1+=1
        if match_a_2(motif1,motif2,a) == 'le joueur 2 gagne':
            f2+=1
    return f1/N,f2/N
```

```
def proba_victoire2(motif1,motif2,a,N):
    f1,f2=0,0
    for i in range(N):
        if match_a_2(motif1,motif2,a) == 'le joueur 1 gagne':
            f1+=1
        elif match_a_2(motif1,motif2,a) == 'le joueur 2 gagne':
            f2+=1
    return f1/N,f2/N

def proba_victoire3(motif1,motif2,a,N):
    f1,f2=0,0
    for i in range(N):
        if match_a_2(motif1,motif2,a) == 'le joueur 1 gagne':
            f1+=1
        else:
            f2+=1
    return f1/N,f2/N
```

b) Pour chacune des trois fonctions proposées, dire si elle est correcte (c'est-à-dire qu'elle fournit bien le résultat attendu). On justifiera les réponses et on pourra faire des commentaires.

Alice, Bérénice et Candice s'affrontent lors de matchs à 2.

c) Dans le premier match, Alice joue contre Bérénice. Alice gagne la partie si le motif p apparaît strictement avant le motif f p et Bérénice gagne la partie si le motif f p apparaît avant ou au même instant que le motif p . On note A l'événement "Alice gagne" et B l'événement "Bérénice gagne".

(i) Calculer $P(A)$ et en déduire $P(B)$.

(ii) À quelle condition sur a, Bérénice a-t-elle une plus grande probabilité de victoire qu'Alice ?

(iii) Dans le cas où $a = 0.45$, comment exécuter la fonction python `match_a_2` pour simuler un match entre Alice et Bérénice (bien qu'ici, les deux motifs puissent apparaître pour la première fois en même temps) ? (on justifiera la réponse).

d) Dans le deuxième match, Bérénice joue contre Candice. Bérénice gagne la partie si le motif f p apparaît avant le motif p p et Candice gagne la partie si le motif p p apparaît avant le motif f p . On note cette fois B' l'événement "Bérénice gagne" et C l'événement "Candice gagne".

(i) Montrer que la famille d'événements (B', C) forme un système quasi-complet d'événements.

(ii) Démontrer que $P(C) = a^2$ et en déduire à quelle condition sur a, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice.

4. **BONUS (les réponses à ces questions ne seront corrigées que si ce qui précède est correctement traité) :**

a) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(T_k)$ converge et donner la valeur de sa somme totale.

<u>Indication</u> : On distinguera le cas $a = \frac{1}{2}$ et le cas $a \neq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_k)$ converge et donner la valeur de sa somme totale.

c) On reprend les conditions du deuxième match. Est-il possible que la victoire de Bérénice soit plus probable que la victoire de Candice alors que le temps d'attente moyen du motif f p est supérieur au temps d'attente moyen du motif p p ?