DM 04 séries

BCPST Spé 2

à rendre le jeudi 12 octobre 2023
Dur et facultatif

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = \frac{2}{2n+1} f(0) + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((2n+1)t/2) dt.$$

2. En utilisant un théorème de première année sur les fonctions continues sur un segment.

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi[$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

5. Dédurre des questions précédentes que $S_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$.