

DM 06

BCPST Spé

à rendre le lundi 10 novembre

Rappel : la fonction ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}$), loi étant la liste $[P(X=0), P(X=1), \dots, P(X=n)]$.

```
from matplotlib.pyplot import *  
  
def graphe(loi):  
    lx=[i for i in range(len(loi))]  
    bar(lx,loi)  
    ylim(0,0.5)  
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B . À chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.

Notations : pour chaque $n \geq 1$, α_n (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le n -ième trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'événement « la n -ième fourmi choisit le trajet A (resp. B) ». Nous supposons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.

On a donc $P_{[\alpha_n=a] \cap [\beta_n=b]}(A_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$ et $P_{[\alpha_n=a] \cap [\beta_n=b]}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$.

Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.

Nous supposons qu'initialement $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r > 1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

1. Déterminer la loi des variables X_1 , X_2 et X_3 .
2. Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r , simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.

3. (a) Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilités $[P(X_n=0), P(X_n=1), \dots, P(X_n=n)]$ obtenues en faisant 1000 simulations de la variable aléatoire X_n .
(b) Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n = 100$ et $r = 2$. Commenter.

4. Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $P(X_n = n)$.

On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.

5. On pose : $\forall n \geq 1, p_n(r) = \frac{r}{r+1} \times \frac{r^2}{1+r^2} \times \dots \times \frac{r^n}{1+r^n}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, q_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r^{2n+1}}\right)$.

Démontrer que pour tout $r > 1$, les suites $(p_n(r))_{n \geq 1}$ et $(q_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.

6. En remarquant que $\forall n \geq 1, p_n(r) = \frac{1}{1+r^{-1}} \times \frac{1}{1+r^{-2}} \times \dots \times \frac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que : $p(r) \geq \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right)$.

On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

7. Démontrer que $\forall r > 1, q(r) \leq \exp\left(-\frac{r}{r^2-1}\right)$.

8. On admet que $\forall r > 1, p(r) = q(r)$. Dédurre des question précédente un encadrement de la limite de la probabilité $P(X_n = n)$ en fonction de r .

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité?