DM 05 Vacances

Bio Spé

Réponses

Exercice 1 : Analyse

Partie I. Formule du binôme négatif.

Pour tout couple (n,r) d'entiers naturels tels que $0 \leqslant r \leqslant n$, on rappelle la formule du " triangle de Pascal" :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Montrer que pour tout entier r de $[\![1, n]\!]$ on a

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$$

RÉPONSE:

- Par télescopage Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} &= \sum_{k=r}^{n} \left[\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r}\right] && \text{formule du triangle}\\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} - \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r}\\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} - \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r} && \text{chg indice}\\
&= \binom{n}{r} - \binom{r-1}{r}\\
&= \binom{n}{r} && \text{par convention } \binom{r-1}{r} = 0
\end{aligned}$$

- Par récurrence
  Fixons $r \in \mathbb{N}^*$.
  Posons pour $n \geqslant r$

$$\mathscr{H}_n \ : \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$$

Initialisation Pour $n = r$ on doit démontrer

$$\mathscr{H}_r \ : \binom{r}{r} = \sum_{k=r}^{r} \binom{k-1}{r-1} = \binom{r-1}{r-1}$$

ce qui est vrai

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant r$. Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{r} &= \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} && \text{formule du triangle}\\
&= \binom{n}{r-1} + \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} && \text{HR}\\
&= \sum_{k=r}^{n+1} \binom{k-1}{r-1}
\end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence :

- Autre récurrence] On peut aussi faire une par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer

$$\mathscr{H}_n \qquad \forall r \in [\![1, n]\!] \qquad \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in [\![1, n]\!] \qquad \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}}$$

❀

2. Soit (n,r) un couple d'entiers naturels, tels que $1 \leqslant r \leqslant n$. Pour tout réel x de $]0;1[$, on définit la fonction $f_{r,n}$ par :

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k$$

(a) Montrer, pour tout réel x de $]0;1[$, l'égalité :

$$(1-x) f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ et Soit $x \in]0;1[$

$$\begin{aligned}
(1-x) f_{r,n}(x) &= (1-x) \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k \\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k - \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k - \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r} x^k \text{ chg indice deuxième somme} \\
&= \sum_{k=r+1}^{n} \left[\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r} \right] x^k + \binom{r}{r} x^r - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=r+1}^{n} \binom{k-1}{r-1} x^k + x^r - \binom{n}{r} x^{n+1} \text{ formule du triangle} \\
&= \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^{k+1} + x^r - \binom{n}{r} x^{n+1} \text{ chg indice} \\
&= \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^{k+1} + \binom{r-1}{r-1} x^{r-1+1} - \binom{n}{r} x^{n+1} \text{car } \binom{i}{i} = 1 \\
&= \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^{k+1} - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^k - \binom{n}{r} x^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de }]0;1[,\ (1-x) f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}}$$

❀

(b) On suppose l'entier r fixé. Montrer[1], lorsque n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}$.

RÉPONSE:

On a alors

$$\binom{n}{r} = \frac{\prod_{k=0}^{r-1} (n-k)}{r!}$$

Or pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$

$$n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Car k est fixé ! !
Par produit

$$\prod_{k=0}^{r-1} (n-k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \prod_{k=0}^{r-1} n$$

et donc

$$\prod_{k=0}^{r-1} (n-k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r$$

Par quotient

$$\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}}$$

❀

3. Soit x un réel fixé de $]0;1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et déterminer la valeur de cette limite.

1. question classique

(a) Justifier l'existence et donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} f_{0,n}(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f_{1,n}(x)$.

RÉPONSE:

Pour $x \in]0;1[$

$$f_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in]0;1[\ \lim_{n\to+\infty} f_{0,n}(x) = \frac{1}{1-x}}$$

Pour $x \in]0;1[$

$$f_{1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} x^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série dérivée de la série géométrique convergente

$$\boxed{\text{Pour } x \in]0;1[\ \lim_{n\to+\infty} f_{1,n}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

❀

(b) Soit r un entier naturel non nul. On suppose que, pour tout réel x de $]0;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_{r-1,n}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}.$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0;1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0;1[$ fixé, en utilisant la question 2a

$$(1-x)f_{r,n}(x) = xf_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r}x^{n+1} \qquad (*)$$

En utilisant 2b

$$\binom{n}{r}x^{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{n^r}{r!}x^{n+1}$$

Comme r est fixé et $x \in]0;1[$, le théorème des croissances comparées affirme

$$\lim_{n\to+\infty} n^r x^{n+1} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{r}x^{n+1} = 0$$

En utilisant l'hypothèse faite dans cette question

$$\lim_{n\to+\infty} f_{r-1,n-1}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$$

En faisant tendre n vers pus $+\infty$ dans $(*)$

$$(1-x)f_{r,n}(x) = x\frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$$

Comme $1-x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

. Nous venons de démontrer

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0;1[\text{ et pour tout } r \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r}x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$$

Remarque : On ne demandait pas de rédiger la récurrence , mais nous avons bien démontré l'initialisation et l'hérédité.

❀

Partie II. Développement en série de $\ln(1-x)$

Soit x un réel de $]0;1[$

1. Montrer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t\right] && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} && \text{changement d'indice}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}}$$

❀

2. À l'aide d'un encadrement simple, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$$

RÉPONSE:

Pour $t \in [0; x]$

$$0 \leqslant t^n \leqslant x^n$$

donc, comme t^n est positif

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$$

Par croissance de l'intégrale et comme à $\leqslant x$

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers 0. En utilisant le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0}$$

❀

3. En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

RÉPONSE:

En utilisant la première question de cette partie

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$$

donc

$$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$$

En utilisant la limite trouvée dans la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{x^k}{k} \text{ converge et sa somme totale vaut } -\ln(1-x)}$$

Exercice 2 : Loi hypergéométrique

On dispose d'une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules rouges, avec

$$p \in]0;1[\qquad pN \in \mathbb{N} \qquad q = 1-p$$

On note $N_b = pN$ le nombre de boules blanches et $N_r = qN$ le nombre de boules rouges.

On tire $n \in [\![0, N]\!]$ boules successivement et sans remise, et on note X le nombre de boules blanches obtenues

1. Écrire une fonction python `hypergéométrique(n,nb_blanches,nb_rouges)` qui simule cette expérience attention ici `nb_blanches` désignera le nombre de boules blanches et non la proportion. *idem* pour `nb_rouges`.

RÉPONSE:

les numéros vont de 1 à `nb_blanches+nb_rouges` ON considère que ls billes sont numérotées pour pouvoir utiliser `randint`, les numéros vont de 1 à `nb_blanches+nb_rouges` et les blanches sont celles dont le numéros est plus petits que `nb_blanches`.

```
import random as rd

def hypergéométrique(n,nb_blanches,nb_rouges):
    ''' simulation du tirage de n boules successivement sans
    remise dans une urne contenant nb_boules blanches et
    nb_boules rouge, on renvoie le nombre de boules blanches
    tirées'''
    resultat=0
    for i in range(n):
        r=rd.randint(1,nb_blanches+nb_rouges)
        if r<=nb_blanches:# on a tiré une blanche
            resultat+=1
            nb_blanches-=1 # on retire la boule
        else:
            nb_rouges-=1 #on retire la boule
    return resultat
```

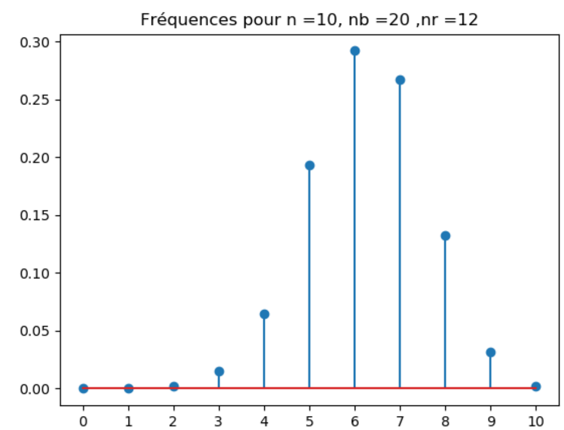
Pour faire des tests, nous calculons des fréquences que nous affichons sous forme de diagramme en barre

```
import matplotlib.pyplot as plt #pour les graphes
import numpy as np

def frequence(N,n,nb,nr):
    #N le nb d'expériences
    F=np.zeros(n+1) #le résultat d'une expérience peut être 0, 1, ...
    #F[i] va être égale au nb de fois où l'on obtient i
    for i in range(N): #on repète l'expérience N fois
        r=hypergéométrique(n,nb,nr)
        F[r]+=1
    return F/N #calcul de la fréquence

#affichage
N=10**4
n,nb,nr=10,20,12
plt.stem(range(n+1),frequence(N,n,nb,nr), use_line_collection=True)
plt.title("Fréquences pour n ={0}, nb ={1} ,nr ={2}".format(n,nb,nr))
plt.show()
```

Quelques résultats dont une situation extrême.



2. Montrer que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. Puis que le nombre de boules blanches tirées est forcément compris entre $\max(0, n - N_r)$ et $\min(n, N_b)$

RÉPONSE:

Comme on retire n billes, le nombre de billes blanches retirées, qui est un entier naturel, est plus petit que n

$$\boxed{X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]}$$

Plus précisément, le nombre de billes blanches retirées doit être plus ou égale au nombre de billes blanches disponibles donc avec la condition précédente le nombre de billes blanches tirées est plus petit que $\min(n, N_b)$. De plus le nombre de boules noires influence sur le nombre minimum de billes blanches tirées. Dans le pire des cas si on tire toutes les billes noires, on ne peut tirer que $n - N_n$ billes blanches.

$$\boxed{X(\Omega) \subset [\![\max(0, n - N_r), \min(n, N_b)]\!]}$$

Remarque : Il y a égalité, la démonstration formelle se trouve dans la réponse suivante

❀

3. Soit un entier k vérifiant cette condition, montrer que le nombre de tirages de n boules qui donnent k boules blanches est

$$\binom{n}{k}\frac{pN!}{(pN-k)!}\frac{qN!}{(qN-(n-k))!}$$

RÉPONSE:

On considère que les billes de chaque couleurs sont distinguables, par exemples numérotées

- Pour choisir les k rangs qui donneront des billes blanches, nous avons $\binom{n}{k}$ possibilités.
- Choisir les billes blanches qui occupent ces k rangs est un choix sans répétition et avec ordre, un arrangement de k éléments parmi $pN = N_b$. Le nombre de possibilités est

$$A^k_{pN} = pN \times (pN-1) \times (Pn - k + 1) = \frac{pN!}{(pN-k)!}$$

- de la même façon pour choisir l'arrangement des $n-k$ billes noires parmi les qN, le nombre de possibilités est

$$A^{n-k}_{qN} = qN \times (qN-1) \times (qN-(n-k)+1) = \frac{qN!}{(qN-(n-k))!}$$

$$\boxed{\text{Le nombre de tirages de } n \text{ boules qui donnent } k \text{ boules blanches est } \binom{n}{k}\frac{pN!}{(pN-k)!}\frac{qN!}{(qN-(n-k))!}}$$

❀

4. Déduire que pour ce même k

$$P(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

RÉPONSE:

Comme on considère que les tirages de n boules sont de même probabilité, et qu'il y a $N(N-1) \times \cdots \times (N-n+1) = \dfrac{N!}{(N-n)!}$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\binom{n}{k}\dfrac{pN!}{(pN-k)!}\dfrac{qN!}{(qN-(n-k))!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!}} \\ &= \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{pN!}{(pN-k)!}\dfrac{qN!}{(qN-(n-k))!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!}} \\ &= \frac{\dfrac{pN!}{(pN-k)!k!}\dfrac{qN!}{(qN-(n-k))!(n-k)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour } k \in X(\Omega),\ P(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

❀

5. Expliquer brièvement pourquoi cette formule reste vraie pour $k \in [\![0, n]\!]$

RÉPONSE:

Quand k est plus petit que $Nb = pN$ alors le terme $\binom{pN}{k}$ et nul est donc la probabilité est bien nulle, ce qui est cohérent car cette situation ne peut pas arriver.
De la même façon, lorsque k est inférieur à $n - N_r = n - qN$, alors $n - k$ est supérieur à qN et donc le terme $\binom{qN}{n-k}$ est nul.

❀

6. En utilisant le fait que $([X = i])_{i\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements et en notant $N_b = a$ $N_r = b$ démontrer la formule de Vandermonde
$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

RÉPONSE:

Comme $([X = i])_{i\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'évènements
$$\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$$
On obtient donc
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{pN}{i}\binom{qN}{n-i}}{\binom{N}{n}} = 1$$
et en posant $N_b = pN = a$ et $N_r = qN = b$
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{pN}{i}\binom{qN}{n-i} = \binom{N}{n}$$
Alors $a + b = pN + qN = N_b + N_r = N$
$$\boxed{\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}$$

❀

7. Montrer que pour pour tout entier naturel k non nul et pour tout entier naturel n
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

RÉPONSE:

Remarque : Résultat très classique.
Si $k > n$ alors les deux termes de l'égalité sont nuls. Si $k \in [\![1, n]\!]$ alors
$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

❀

8. En déduire que $E(X) = np$

RÉPONSE:

Comme X prend un nombre fini de valeurs, elle admet une espérance et une variance.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) && \text{certains termes de la somme sont nuls}\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=0}^{n} k\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}\right]\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n} k\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}\right] && \text{1er terme nul}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n} pN\binom{pN-1}{k-1}\binom{qN}{n-k}\right] && \text{formule précédente}\\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{pN-1}{k}\binom{qN}{n-1-k}\right] && \text{changement indice}\\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}}\binom{pN-1+qN}{n-1} && \text{formule de Vandermonde}\\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}\\
&= pN\frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-1-(n-1))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\\
&= pN\frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-n)!}}\\
&= np
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(X)=np}$$

Pour vérifier ces résultats on propose le programme suivant

```
N=10**4
n,nb,nr=10,20,12
S=0
for i in range(N):
   S+=hypergéométrique(n,nb,nr)
moyenne=S/N
print("une estimation  de l'espérance est", moyenne)
print("la valeur théorique  est", n*nb/(nb+nr))

>>>une estimation  de l'espérance est 6.257
>>>la valeur théorique  est 6.25
```

❀

9. Montrer que $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

<u>RÉPONSE:</u>

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 && \text{formule de KH}\\
&= E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2 && \text{astuce classique}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) && \text{premiers termes nuls}\\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}\right]\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=2}^{n}(k-1)pN\binom{pN-1}{k-1}\binom{qN}{n-k}\right] && \text{formule précédente}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=2}^{n}pN(pN-1)\binom{pN-2}{k-2}\binom{qN}{n-k}\right] && \text{formule précédente}\\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=2}^{n}\binom{pN-2}{k-2}\binom{qN}{n-k}\right]\\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\binom{pN-2}{k}\binom{qN}{n-2-k}\right] && \text{chg indice}\\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\binom{pN-2+qN}{n-2} && \text{formule Vandermonde}\\
&= \frac{pN(pN-1)}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\\
&= pN(pN-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\\
&= p(pN-1)\frac{n(n-1)}{N-1}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2\\
&= p(pN-1)\frac{n(n-1)}{N-1} + np - np^2\\
&= np\left((pN-1)\frac{n-1}{N-1} + 1 - np\right)\\
&= \frac{np}{N-1}\left((pN-1)(n-1) + (N-1)(1-np)\right)\\
&= \frac{np}{N-1}\left(npN - n - pN + 1 + N - npN - 1 + np\right)\\
&= \frac{np}{N-1}\left(-n - pN + N + np\right)\\
&= \frac{np}{N-1}\left(N(1-p) - n(1-p)\right)\\
&= \frac{np}{N-1}(N-n)(1-p)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}}$$

```
N=10**4
n,nb,nr=10,20,12
SM=0
SV=0
for i in range(N):
    r=hypergéométrique(n,nb,nr)
    SM+=r
    SV+=r**2
moyenne=SM/N
variance=SV/N-moyenne**2
print("une estimation  de la variance  est", variance)
N=nb+nr
p=nb/N
print("la valeur théorique  est", n*p*(1-p)*(N-n)/(N-1))

>>>une estimation  de la variance  est 1.663945510000005
>>>la valeur théorique  est 1.6633064516129032
```

❀

10. Montrer que si les tirages ont lieu simultanément la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées suit la même loi.