

## COMPLEXES ET POLYNÔMES

### Complexes et trigonométrie

#### Exercice 1.

Calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres suivants :

- |                                     |                      |
|-------------------------------------|----------------------|
| 1. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ | 3. $\frac{i-1}{i+1}$ |
| 2. $\frac{1+2i}{3+4i}$              | 4. $(1+i)^3$         |

#### Exercice 2.

Mettre sous forme trigonométrique ou exponentielle :

- |                      |                                 |
|----------------------|---------------------------------|
| 1. $1 + e^{i\theta}$ | 3. $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ |
| 2. $1 - e^{i\theta}$ | 4. $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$ |

#### Exercice 3.

Pour  $z = a + ib$  un nombre complexe, on pose :

$$\exp(z) = \exp(a) \exp(ib)$$

- calculer  $|\exp(z)|$  et  $\arg(\exp(z))$
- Montrer que cette définition respecte les propriétés « classiques » de l'exponentielle.
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ ,  $e^z = i$

#### Exercice 4.

Exprimer en fonction de  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$

- |               |               |
|---------------|---------------|
| 1. $\cos(3x)$ | 3. $\cos(5x)$ |
| 2. $\sin(3x)$ | 4. $\sin(6x)$ |

#### Exercice 5.

Linéariser les expressions suivantes :

- |                          |                |
|--------------------------|----------------|
| 1. $\cos(x) \sin(x)$     | 3. $\sin^4(x)$ |
| 2. $\cos^3(x) \sin^3(x)$ | 4. $\cos^4(x)$ |

Puis calculer l'intégrale entre 0 et  $\pi/2$  de l'expression donnée.

#### Exercice 6.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on pose :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x) + \cos(nx)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1)x) + \sin(nx)$$

1. Calculer  $S_1 + iS_2$ . En déduire  $S_1$  et  $S_2$ .

2. Si  $x \neq 0[2\pi]$  retrouver le résultat précédent en calculant  $\sin(x/2)S_1$  et  $\sin(x/2)S_2$ .

#### Exercice 7.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose pour  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$   $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$  on pose :

$$S_p = z_0^p + z_1^p + \cdots + z_{n-2}^p + z_{n-1}^p = \sum_{k=0}^{n-1} z_k^p.$$

Calculer  $S_p$ .

#### Exercice 8 (▲).

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx + y)$$

#### Exercice 9.

Le but de cet exercice est de calculer  $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $c = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

- Calculer  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$  en fonction de  $c$  et  $s$
- Montrer que  $c$  est solution de l'équation  $4x^2 - 2x - 1 = 0$ .
- En déduire une valeur de  $c$  et de  $s$ .

#### Exercice 10 (Équations trigonométriques).

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

- |                             |                                                   |
|-----------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. $\cos(x) = 1/2$          | 5. $\sin(x+1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$              |
| 2. $\sin(x) = 1$            | 6. $\cos(x) + \sin(x) = 0$                        |
| 3. $\tan(x) = \sqrt{3}$     | 7. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$                |
| 4. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ | 8. $\sqrt{3}\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$ |

#### Exercice 11 (Équations trigonométriques ▲).

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- $\tan(x) + \tan(2x) = \tan(3x)$
- $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

#### Exercice 12 (▲).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  on note

$$\omega_0 = e^{i2\pi/n} \quad U_n = \left\{ \omega_0^k / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- Montrer que si  $z \in U_n$  alors  $z^k \in U_n$  et  $\bar{z} \in U_n$
- Calculer  $\prod_{z \in U_n} z$  et  $\sum_{z \in U_n} |z-1|$

### Polynômes

#### Définitions

#### Exercice 13.

Calculer le degré et le coefficient dominant de :

- $X^3 - 3iX + X(X-2+i)^2$

2.  $(X-2)^n - (X+1)^n$

3.  $\prod_{k=1}^n (X^k - 2^k)$

#### Exercice 14.

Résoudre dans  $\mathbb{K}[X]$

$$P(X^2) = X^2 P$$

On commencera par trouver une condition nécessaire sur le degré d'une solution.

#### Exercice 15 (▲).

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$P_n = \frac{1}{2i} \left[ (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} \right]$$

Montrer que  $P_n \in \mathbb{R}[X]$ , calculer son degré, son coefficient dominant.

#### Exercice 16.

En calculant de deux façons les coefficients du polynôme  $(X+1)^{n+m}$  montrer que :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$

#### Exercice 17.

Factoriser dans  $\mathbb{C}$  les polynômes suivants

- |                     |                                                                        |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1. $X^2 + 1$        | 4. $X^4 + i$                                                           |
| 2. $X^4 + 2X^2 + 1$ | 5. $X^3 + X^2 + 2X + 2$ on commencera par chercher une racine évidente |
| 3. $X^4 - X^2$      |                                                                        |

#### Exercice 18 (Exemple de racines nièmes et factorisation).

En écrivant le membre de gauche et de droite sous forme exponentielle, résoudre les équations suivantes, représenter les solutions dans le plan complexe

- |                                                                         |                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1. $z^4 = 1$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^4 - 1$ | 3. $z^3 = 1$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^3 - 1$ |
| 2. $z^5 = i$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme           |                                                                         |

#### Exercice 19.

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$  On commencera par utiliser une identité remarquable.

2. En déduire une factorisation de  $X^6 - 2X^3 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$
3. Faire de même avec l'équation  $z^6 + 2z^3 + 1 = 0$  et le polynôme  $X^6 + 2X^3 + 1$

#### Exercice 20 (polynômes pairs/impairs).

On dit qu'un polynôme  $P$  est pair si et seulement si  $P(-X) = P(X)$  et qu'il est impair si et seulement si  $P(-X) = -P(X)$ . On note  $P = \sum a_n X^n$

1. Montrer que  $P$  est pair si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0$
2. Trouver une CNS similaire pour  $P$  impair.

#### Exercice 21 (▲ ▲).

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes

$$P_n = X^{2n} - 1 \quad I_n = X^{2n+1} - 1$$

puis trouver les factorisations dans  $\mathbb{R}[X]$

#### Exercice 22 (▲).

On note  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ . Montrer que ces polynômes n'ont que des racines simples dans  $\mathbb{C}$

#### Exercice 23 (▲ relations coefficients/racines).

Soit  $= X^3 + aX^2 + bX + c$  on suppose que  $P$  admet dans  $\mathbb{C}$  trois racines  $x_1, x_2, x_3$ .

1. Exprimer  $a, b$  et  $c$  en fonction des racines.
2. Se servir de ce résultat pour résoudre dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$  les systèmes suivants.

|     |                                                                            |     |                                                                               |
|-----|----------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------|
| (a) | $\begin{cases} xyz = -1 \\ xy + yz + xz = -2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ | (c) | $\begin{cases} xyz = 6 \\ x + y + z = -4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$ |
| (b) | $\begin{cases} xyz = 2 \\ xy + yz + xz = -1 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$ |     |                                                                               |

### Pour aller plus loin

#### Exercice 24.

On considère le polynôme  $P = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$

1. Trouver les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  ( penser à l'exercice 18).
2. En déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$
3. Montrer que pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\sin \frac{k\pi}{n} = -\frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} \left( 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

en déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

4. Trouver une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$

#### Exercice 25 (Expression de la dérivée nième).

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on note

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Soit  $P = \sum a_k X^k$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Démontrer que pour  $\ell \in \mathbb{N}$

$$P^{(\ell)} = \sum_{k \geq \ell} A_k^\ell a_k X^{k-\ell}$$

#### Exercice 26 (Valuation).

Soit  $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un polynôme non nul. On nomme valuation de  $P$  et on note  $\text{val}(P)$  le plus petit entier tel que  $a_k \neq 0$ .

1. Que va-t-on choisir comme valuation du polynôme nul?
2. Montrer que  $\text{val}(P+Q) \geq \min(\text{val}(P), \text{val}(Q))$ . Donner un cas d'égalité.
3. Montrer que  $\text{val}(PQ) = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$