

ESPACES VECTORIELS

Dans tout ce TD la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels? de $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = x + 2y + 3z = 0\}$
2. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y - z + 3t = 1\}$
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y^2 - z = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = 0\}$

Exercice 2.

Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

1. $A = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 0\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 3\}$
3. $C = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P' = 0\}$
4. $D = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = P(0)\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) \leq P(0)\}$
6. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet } 1 \text{ comme racine double}\}$
7. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet une racine double}\}$

Exercice 3.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec les bonnes conditions). Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels?

1. $A = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f(1) = 0\}$
2. $B = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f \text{ est continue et } \int_0^1 f(t) dt = 0\}$
3. $C = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } \lim_0 f = 0\}$

Exercice 4 (ensembles de matrices).

Les ensembles suivants sont ils des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

1. $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = d = 0 \right\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = d \right\}$
3. $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a + b + c + d = 0 \right\}$
4. $\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a^2 + b^2 = 0 \right\}$
5. $\mathcal{E}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = 1 \right\}$

Exercice 5 (ensembles de matrices).

Les ensembles suivants sont ils des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$?

1. $\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^T = M\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^T = -M\}$
3. $\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^2 = 0\}$
4. A est une matrice carrée d'ordre n **fixée**, $\mathcal{E}_4 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ AM = 0\}$
5. $\mathcal{E}_5 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ \text{La somme des coefficients diagonaux de } M \text{ vaut } 0\}$

Exercice 6 (▲).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

1. Montrer à l'aide d'un contre exemple que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $F \cup G$ n'est pas forcément un sous espace vectoriel.
On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E
2. Condition???.
Montrer que si $F \cup G$ est un sous espace vectoriel alors :

$$F \subset G \quad \text{ou} \quad G \subset F$$

Indication : raisonnement par contraposée

3. Conclure

Exercice 7.

Les ensembles suivants sont ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{C}$?

1. $i\mathbb{R}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{R}\}$

Familles libres, familles génératrices

Exercice 8.

On pose $E = \mathbb{R}^3$ Soit

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

,

$$\mathcal{B}_2 = ((1, 2, 1), (1, -1, 1), (2, 1, -1))$$

Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ forment des bases de $\mathbb{R}^3$ et pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de (x, y, z) dans chacune des bases.

Exercice 9 (Familles de polynômes).

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, les familles suivantes sont elles des bases de E

1. $P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2$
2. $P_1 = X(X-1), P_2 = X(X+1), P_3 = X^2 - 1$
3. $P_1 = 1 + X, P_2 = 1 + X^2$
4. $P_1 = 1 + X, P_2 = X + X^2, P_3 = 1$ et $P_4 = X^2 - 1$

Exercice 10 (Familles de polynômes).

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, les familles suivantes sont elles des bases de E

1. $P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2, P_4 = 1 + X + X^2 + X^3$
2. $P_1 = 1 + X, P_2 = X + X^2, P_3 = X^2 + X^3, P_4 = X^3$
3. $P_1 = (X-1)(X-2)(X-3), P_2 = (X)(X-2)(X-3), P_3 = X(X-1)(X-3), P_4 = X(X-1)(X-2)$
4. $P_1 = X, P_2 = X^2 + 1, P_3 = 1 + X + X^3$

Exercice 11 (Familles de matrices).

Les familles suivantes forment elles des bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 12.

On note $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M \right\}$ et $G = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = -M \right\}$

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
2. Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$
3. Trouver une base de F et une base de G
4. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $M_F \in F$ et une unique matrice $M_G \in G$ telles que $M = M_F + M_G$.

Exercice 13 (▲ Généralisation de 12).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \quad \mathcal{S}_n = \left\{ M \in \mathcal{E}_n \mid M^T = M \right\} \quad \mathcal{A}_n = \left\{ M \in \mathcal{E}_n \mid M^T = -M \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$
2. Trouver une matrice A telle que $A \notin \mathcal{A}_n \cup \mathcal{S}_n$
3. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{E}_n$ il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n$ et une unique matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telles que $M = A + S$. On pourra raisonner par analyse-synthèse

Exercice 14.

Soit $x_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, $x_2 = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$... $x_n = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$. Étudier la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 15.

Soit $P_1, P_2, \dots, P_n$ une famille de n polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que les degrés des P_i sont strictement croissants et $P_1 \neq 0$.

1. Montrer que la famille est libre.
2. Est-elle forcément génératrice?
3. Trouver une famille de polynômes (avec plus d'un polynôme) dont tous les éléments sont de même degré et qui soit libre (on se placera dans $\mathbb{K}_2[X]$)

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On note

$$f_1 = e_1 \quad f_2 = e_2 + e_1 \quad f_3 = e_3 + e_1 \quad f_4 = e_4 + e_1$$

1. On suppose que (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
2. On suppose que (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de E , montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est génératrice de E

Exercice 17.

En s'inspirant des procédés vus en classe.

1. On pose $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $e_2 = (-1, 1, -1, 1)$ compléter e_1, e_2 en une base de $\mathbb{R}^4$
2. On pose $e_1 = (1, 1), e_2 = (-1, 1), e_3 = (1, 0), e_4 = (1, 2)$ réduire (e_1, e_2, e_3, e_4) en une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice 18.

On note E l'espace vectoriel des application continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. la famille $(\cos, \sin)$ est elle libre? Est elle une famille génératrice de E ?
2. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{kx}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre (pensez au théorème des croisances comparées ou au principe d'identification). Est ce une famille génératrice de E ?

Exercice 19 ($\blacktriangle$). 1. Pour p et q deux entiers naturels calculer

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx$$

2. Montrer que pour n un entier naturel non nul la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), \dots, x \mapsto \cos(nx))$ est libre (faire une récurrence). Est ce une famille génératrice de E ?

Exercice 20 ($\blacktriangle$).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E , on note

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
3. Trouver une CNS pour que $\mathcal{F}$ soit une base

Exercice 21.

Calculer la dimension de A .

1. $E = \mathbb{R}^3, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = x + 2y = 0\}$
3. $E = \mathbb{C}_3[X], A = \{P \in \mathbb{C}_3[X] / P' = 0\}$
4. $E = \mathbb{R}_4[X], A = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$

Exercice 22.

Calculer le rang des familles suivantes, en déduire leurs caractéristiques.

1. dans $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (2, 1, 1), e_4 = (1, 2, 1)$
2. dans $\mathbb{C}^4$ $e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (1, 0, 1, 0), e_3 = (1, -1, 1, -1), e_4 = (1, 1, 1, 1)$
3. dans $\mathbb{R}_3[X]$ $X, X^2 - X, X^3 - X^2, X^3 - X$

Exercice 23.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{H}_\alpha$ la famille

$$\mathcal{H}_\alpha = ((1, -1, 0, 2), (1, 0, 1, 2), (1, 3, 5, 7), (0, 2, 3, \alpha))$$

calculer en fonction de α le rang de $\mathcal{H}_\alpha$

Exercice 24 ($\blacktriangle, \blacktriangle$).

Soit A et B deux sev de E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Montrer que $A \cap B$ est de dimension finie et majorer $\dim A \cap B$

Exercice 25.

Soit F l'ensemble des matrices 2×2 vérifiant

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ b + c + d = 0 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base de F
3. Même question avec $F' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a + d = b + c \right\}$

Exercice 26.

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . En donner une base.

Exercice 27.

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E / f'' = 2f' - f\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrer que $F \neq E$.
3. Soient les fonctions définies pour x réel par

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = xe^x$$

Montrer que f_1, f_2 forment une famille libre de F .

Matrices : calculs

Exercice 28.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels non nuls. Calculer l'inverse de la matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 29.

Montrer que $\forall n \geq 0, A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 30.

Montrer que $\forall n \geq 1, J^n = 6^{n-1} J$ où $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 31.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = B + 2I$

Calculer B^2 puis, à l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n .

Exercice 32.

Pour chacune des matrices suivantes, exprimer A sous la forme $I + B$ puis calculer A^n en utilisant la formule du binôme :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 33.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'inverse de P est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n .

Exercice 34.

On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = 6A - A^2$

2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$
Donner $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$.

3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n .

4. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 35.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $A^2 - 3A + 4I_2$ puis A^{-1} .

Exercice 36.

Calculer l'inverse des matrices suivantes.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. dans $\mathbb{R}_3[X]$ de la base canonique à $(1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$
2. dans $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $(1, 1 + X, 1 + X^2)$ à la base $(X(X - 1), X(X + 1), (X + 1)(X - 1))$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ de $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 2, 2))$ à $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$
4. dans E de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$
5. dans E de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_n)$

Matrices : théorie

Exercice 38 (Opérations sur les lignes et les colonnes).

On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; Calculer

$$E_{i,j} A$$

2. Soit

$$T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$

- (a) Donner une forme explicite de $T_{i,j}$.
 - (b) Calculer $T_{i,j} A$
 - (c) Calculer $T_{i,j}^{-1}$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $L_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$
 - (a) Donner une forme explicite de $L_{i,j}$.
 - (b) Calculer $L_{i,j} A$
 - (c) Calculer, quand elle existe, $L_{i,j}^{-1}$
 4. Que ce passe t'il si on remplace les multiplications à gauche par des multiplications à droite?

Rang : calculs

Exercice 39.

Calculer le rang des matrices suivantes

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0 \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 37.

Écrire les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ dans les cas suivants

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ rg } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix} \text{ en } \text{ fonction de } m \in \mathbb{C}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ rg } \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix} \text{ en } \text{ fonction de } a \text{ et } b.$$

Exercice 40.

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.

3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 41.

Soit (e_1, e_2, e_3) une famille d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit A la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) .

1. On suppose qu'après avoir effectué l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$ on a transformé A en une matrice du type

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer e_3 en fonction de e_2 et e_1

2. En déduire une méthode générale pour trouver des combinaisons linéaires dans une famille liée