# DM 07 : Sujet Oral 2021

Bio Spé

Réponses

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel $X$.

Si cet entier $X$ est impair, Anna donne $X$ euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.

Si $X$ est nul, on considère que la manche est nulle.

Si $X$ est pair non nul, Benoît donne $X$ euros à Anna, on considère que Anna a gagné.

On pose $G$ le gain algébrique de Anna.

On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $a$ avec $a > 0$.

On note enfin :

$A$ : « Anna gagne », $p = P(A)$

$B$ : « Benoît gagne », $q = P(B)$

et $C$ : « la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire $G$.

   On rappelle que `np.random.poisson(a)` permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $a$.

RÉPONSE:

```
from numpy.random import poisson

def SimulGain(a):
    X=poisson(a)
    if X==0:
        Gain=0
    elif X %2==0:
        Gain =X
    else:
        Gain=-X
    return Gain
```

❀

2. (a) Déterminer $r$ et exprimer $p$ et $q$ sous forme d'une somme.

RÉPONSE:

$$r=\mathbb{P}(X=0)=\frac{a^0}{0!}\mathrm{e}^{-a}=\mathrm{e}^{-a}$$

$$\begin{aligned}
p&=\mathbb{P}(A)\\
&=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X=2k]\right)\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k) && \text{union disjointe}\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\\
q&=\mathbb{P}(B)\\
&=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X=2k+1]\right)\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k+1) && \text{union disjointe}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{r=\mathrm{e}^{-a}\quad p=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\ \text{ et }\ q=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

❀

(b) Exprimer $p+q$ et $p-q$ en fonction de $a$.

RÉPONSE:

On a $p+q+r=1$ donc

$$p+q=1-\mathrm{e}^{-a}$$

et

$$\begin{aligned}
p-q &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}(-1)^{2k}\frac{a^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}(-1)^{2k+1}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{le signe de } (-1)^i \text{ dépend de la parité de } i \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}(-1)^i\frac{a^i}{i!} && \text{"fusion" des deux } \Sigma \\
&= \mathrm{e}^{-a}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-a)^i}{i!} \\
&= \mathrm{e}^{-a}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-a)^i}{i!} - 1\right) \\
&= \mathrm{e}^{-a}\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r = \mathrm{e}^{-a} \quad p+q = 1-\mathrm{e}^{-a} \text{ et } p-q = \mathrm{e}^{-a}\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)}$$

❀

(c) En déduire les valeurs de $r, p, q$ en fonction de $a$.

RÉPONSE:

Nous devons donc résoudre un système

$$\begin{cases} p+q & = 1-\mathrm{e}^{-a} \\ p-q & = \mathrm{e}^{-2a}-\mathrm{e}^{-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q & = 1-\mathrm{e}^{-a} \\ 2p & = 1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q & = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2a}\right) \\ p & = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{r = \mathrm{e}^{-a} \ , \ q = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2a}\right) \ p = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a}\right)}$$

❀

3. Compléter le programme de la question 1, pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.

RÉPONSE:

```
def ProbaEspe(a,N=10**5):
    NbSucces=0
    NbNul=0
    SommeG=0
    for i in range(N):
        X=SimulGain(a)
        if X==0:
            NbNul+=1
        elif X>0:
            NbSucces+=1

        SommeG+=X

    return NbNul/N,NbSucces/N,SommeG/N
```

Pour pouvoir vérifier numériquement nos calculs, la fonction donne aussi une probabilité que la manche soit nulle.

❀

4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? On pourra tester les valeurs du gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.

RÉPONSE:

```
In[18]: ProbaEspe(2)
Out[18]: (0.13441, 0.37363, -0.03964)
```

Anna semble avoir un gain moyen négatif

❀

5. (a) Exprimer $G$ en fonction de $X$

RÉPONSE:

$$\boxed{G = (-1)^X X}$$

Cette formule est valable même si $X = 0$, la manche est nulle est le gain des deux joueurs est nul.

❀

(b) Calculer l'espérance du gain $G$ de Anna.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k\mathbb{P}(X=k) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{e}^{-a} a^k}{(k-1)!}\\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-a}(-a)^{k+1}}{k!} && \text{changement d'indice}\\
&= -a\mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k!}\\
&= -a\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-a} && \text{série exponentielle absolument convergente}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = -a\mathrm{e}^{-2a}}$$

❀

6. On suppose désormais que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $\alpha$. On garde les mêmes notations que précédemment.
   (a) Déterminer $p, q, r$.

RÉPONSE:

$X$ ne peut pas prendre la valeur 0

$$\boxed{r = 0}$$

On a $p+q+r=1$ donc

$$p+q=1$$

$$
\begin{aligned}
p - q &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k} \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)^{k} && \text{termes pairs/impairs} \\
&= -\alpha \frac{1}{1-(\alpha-1)} && \text{série géométrique} \\
&= -\alpha \frac{1}{2-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$p - q = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha-2}\right) \text{ et } q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-2}\right) .}$$

Avec la loi géométrique, on peut aussi faire des calculs directs

$$
\begin{aligned}
p &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k-1} \\
&= \alpha(1-\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-\alpha)^2\right)^k \\
&= \alpha(1-\alpha)^{-1}(1-\alpha)^2 \frac{1}{1-(1-\alpha)^2} \\
&= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\alpha - \alpha^2} \\
&= \frac{1-\alpha}{2-\alpha}
\end{aligned}
$$

❀

(b) Calculer l'espérance $E(G)$ de $G$ après avoir justifié son existence.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence absolue

$$
\begin{aligned}
E(G) &= E((-1)^X X) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k\mathbb{P}(X=k) && \text{théorème de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1} \\
&= -\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} k(\alpha-1)^{k-1} \\
&= -\alpha \frac{1}{(1-(\alpha-1))^2} && \text{série dérivée absolument CV}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(G) = -\frac{\alpha}{(2-\alpha)^2}}$$

❀

(c) Comment interpréter le signe de $E(G)$ ?

RÉPONSE:

$(1-\alpha)^2 \in ]0;1[$, cette espérance est négative

❀