DM 09 : Sujet Oral 2024

Bio Spé

à rendre le lundi 1er décembre 2025

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si, et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right). \tag{$\star$}$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle possède une suite adaptée, alors cette suite est unique. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}$.
2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à la fonction f'.
3. On admet dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

   L'objectif est alors de montrer que pour tout entier naturel p, B_p appartient à E.

   (a) Écrire un programme Python qui prend en argument une liste de réels $L = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ et renvoie la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mathrm{d}x$.

   (b) Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.

   (c) Déterminer, pour tout entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

   (d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E.

      i. Montrer que si B_p appartient à E, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_p.

      ii. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.

      iii. Calculer $\int_0^{1/n} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

      iv. Conclure.