DM 06

Bio Spé

Réponses

1. X_1 désigne le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A après un trajet. Avant le premier trajet la quantité de phéromone est de 1 sur chaque trajet donc la probabilité d'emprunter le chemin A pour la première fourmi est $\frac{1}{2}$.

   On a donc $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$.

   On suppose maintenant que 2 fourmis ont effectués leur trajet et on cherche le nombre de fourmis ayant emprunté le chemin A. On a donc $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{r}{r+1}. \\
P(X_2 = 1) &= P([B_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap B_2]) = P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r+1}. \\
P(X_2 = 2) &= P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{r}{r+1}.
\end{aligned}$$

   De même, $X_3(\Omega) = [\![0;3]\!]$ et

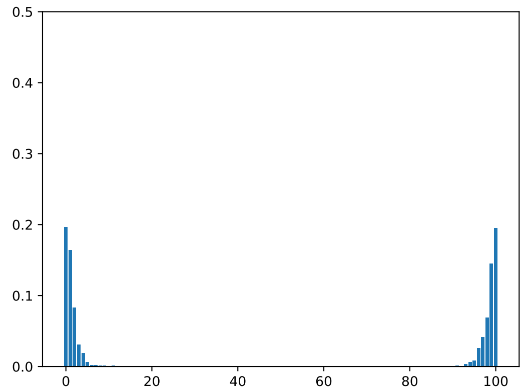
$$\begin{aligned}
P(X_3 = 0) &= P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{r}{1+r} \times \frac{r^2}{1+r^2}, \\
P(X_3 = 1) &= P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap A_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{r+1} \times \frac{r}{r+r} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{r+1} \times \frac{r}{r+r} + \frac{1}{2} \times \frac{r}{1+r} \times \frac{1}{1+r^2} \\
&= \frac{1}{2(r+1)} + \frac{r}{2(1+r)(1+r^2)} \\
P(X_3 = 2) &= P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) \\
&= \frac{1}{2(r+1)} + \frac{r}{2(1+r)(1+r^2)} \\
P(X_3 = 3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{r}{r+1} \times \frac{r^2}{r^2+1}
\end{aligned}$$

2.
```
from random import random

def simulX(n,r):
    S=0
    alpha=1
    beta=1
    for k in range(n):
        if random()<alpha/(alpha+beta):
            S+=1
            alpha=alpha*r
        else:
            beta=beta*r
    return S
```

3. (a)
```
def loiX(n,r):
    X=[simulX(n,r) for k in range(1000)]
    #On réalise 1000 fois l'expérience
    L=[0]*(n+1)#Liste qui va contenir les P(Xn=i)
    for x in X:
        L[x]+=1/1000
    return L
```

   (b) En utilisant la fonction graphe de l'énoncé on obtient :



4. $P(X_n = n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
   Donc $P(X_n = n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{r}{r+1} \times \ldots \times \dfrac{r^{n-1}}{r^{n-1}+1}$.
5. $\dfrac{p_{n+1}(r)}{p_n(r)} = \dfrac{r^{n+1}}{r^{n+1}+1} < 1$ donc la suite $(p_n(r))$ est décroissante et minorée par 0 (produit de termes strictement positifs) donc elle est convergente.
   De plus, $\dfrac{q_{n+1}(r)}{q_n(r)} = 1 - \dfrac{1}{r^{2n+3}} < 1$ car $r > 0$. Donc la suite $(q_n(r))$ est aussi décroissante. Et comme $r > 1$, $q_n(r) > 0$ et donc $(q_n(r))$ est une suite décroissante et minorée donc convergente.
6. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $1 + r^{-i} \leqslant \mathrm{e}^{r^{-i}}$ donc
   $$p_n(r) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-r^{-i}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{r^i}\right).$$
   Or $\sum_{i=1}^{n} -\dfrac{1}{r^i} = -\dfrac{1}{r} \times \dfrac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} \to -\dfrac{1}{r-1}$.
   On en déduit donc, en passant à la limite, que $p(r) \geqslant \exp\left(-\dfrac{1}{r-1}\right)$.
7. D'après l'inégalité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$, on a pour tout entier i : $0 < 1 - \dfrac{1}{r^{2i+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{r^{2i+1}}}$.
   Donc par produit de termes positifs :
   $$q_n(r) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{r^{2i+1}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{r} \times \frac{1-\frac{1}{r^{2n+2}}}{1-\frac{1}{r^2}}\right).$$
   Donc, en passant à la limite, $q(r) \leqslant \exp\left(-\dfrac{r}{r^2-1}\right)$.
8. On peut remarquer que $P(X_n = n) = \dfrac{1}{2} p_{n-1}(r)$.
   Donc $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = n) = \dfrac{p(r)}{2}$ et donc
   $$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{r-1}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} P(X_n = n) \leqslant \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{r}{r^2-1}\right).$$