

## Exercice : Agro-véto 2019

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , considérons l'épreuve de Bernoulli « au  $n$ -ème lancer on obtient un face ». La probabilité de succès est  $P(F_n) = \frac{1}{2}$ .

Les lancers sont indépendants, les épreuves de Bernoulli considérées sont donc indépendantes. La variable aléatoire  $T$  désigne donc le rang du premiers succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

La variable aléatoire  $T$  suit donc une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

On a donc 
$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(T = k) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

De plus 
$$E(T) = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ et } V(T) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.$$

2. L'événement  $[T > n]$  est réalisé si, et seulement si, les  $n$  premiers lancers ont donné pile.  
On a donc  $[T > n] = \overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n}$  et, comme les lancers sont indépendants :

$$P(T > n) = P(\overline{F_1}) \times \dots \times P(\overline{F_n}) = \left[\frac{1}{2^n}\right].$$

Autre méthode :  $[T > n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [T = k].$

3. (on va ici redémontrer la propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique).

$$\begin{aligned} P_{[T > n]}(T > n + m) &= \frac{P([T > n] \cap [T > n + m])}{P(T > n)} = \frac{P(T > n + m)}{P(T > n)} \text{ car } [T > n + m] \subset [T > n] \\ &= \frac{1}{2^{n+m}} \times 2^n = \frac{1}{2^m} = P(T > m). \end{aligned}$$

On a bien 
$$P_{[T > n]}(T > n + m) = P(T > m).$$

On peut dire que la loi géométrique est sans mémoire : le fait d'avoir eu  $n$  échecs ne change pas la probabilité d'en avoir encore  $m$  ensuite.

4.  $p_1 = P(S = 1) = \left[0\right]$  car il faut au moins deux lancers pour faire un double face.

$p_2 = P(S = 2) = P(F_1 \cap F_2) = \left[\frac{1}{4}\right]$  car les lancers sont indépendants.

$p_3 = P(S = 3) = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = \left[\frac{1}{8}\right]$  car les lancers sont indépendants.

$p_4 = P(S = 4) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4),$   
car on a une union d'événements disjoints.

Toujours par indépendance des lancers, on obtient  $p_4 = \frac{2}{16} = \left[\frac{1}{8}\right].$

On en déduit 
$$q_1 = 1, q_2 = \frac{3}{4}, q_3 = \frac{5}{8} \text{ et } q_4 = \frac{1}{2}.$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $[S > n] = \overline{[S \leq n]} = \overline{\bigcup_{k=1}^n [S = k]}.$

Ayant une union d'événements disjoints deux à deux, on en déduit que

$$P(S > n) = 1 - \sum_{k=1}^n P(S = k) = 1 - \sum_{k=1}^n p_k = q_n.$$

Ainsi 
$$P(S > n) = q_n.$$

6. Une probabilité étant toujours comprise entre 0 et 1, d'après la question précédente,  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, q_n \in [0; 1]}$ .

De plus,  $[S > n + 1] \subset [S > n]$  donc  $q_{n+1} \leq q_n$  et ainsi la suite  $(q_n)$  est décroissante.

La suite  $(q_n)$  est donc décroissante et minorée, donc  $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

7. L'astuce consiste ici à remarquer que  $[S = n + 3] = [S > n] \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= P(S > n) \times P_{[S > n]}(\overline{F_{n+1}}) \times P_{[S > n] \cap \overline{F_{n+1}}}(F_{n+2}) \times P_{[S > n] \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2}}(F_{n+3}) \\ &= q_n \times \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par définition de  $q_n$  on a alors :

$$\boxed{q_{n+3} = q_{n+2} - p_{n+3} = q_{n+2} - \frac{q_n}{8}.$$

8. On a montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \ell \in [0; 1]$ .

Par composition de limites on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_{n+3} = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_{n+2} = \ell$ .

Par propriété d'unicité de la limite, on a donc  $\ell = \ell - \frac{\ell}{8}$  et donc  $\ell = 0$ .

Ainsi  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0}$  ce qui signifie qu' $\boxed{\text{on est presque certain d'obtenir un double face après un grand nombre de lancers.}}$

9. Dans cette question, l'astuce consiste à distinguer le résultat du premier lancer. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(F_1, \overline{F_1})$  on a

$$\begin{aligned} P(S > n + 2) &= P(F_1)P_{F_1}(S > n + 2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(S > n + 2) \\ &= \frac{1}{2}P_{F_1}(S > n + 2) + \frac{1}{2}P_{\overline{F_1}}(S > n + 2) \end{aligned}$$

Il faut ensuite remarquer que lorsqu'on sait que  $F_1$  est réalisé dire que  $[S > n + 2]$  revient à dire qu'on a obtenu pile au deuxième lancer et qu'ensuite à partir du 3ème lancer, tout peut se produire, c'est comme si on reprenait l'expérience à 0 et qu'on obtenait l'événement  $[S > n]$ .

Donc  $P_{F_1}(S > n + 2) = P(\overline{F_2}) \times P(S > n)$ .

De même, le fait de savoir qu'on a fait pile au premier lancer n'impose aucune contrainte à partir du deuxième lancer et donc c'est comme si on repartait de 0 et qu'on obtenait l'événement  $[S > n + 1]$ . Donc  $P_{\overline{F_1}}(S > n + 2) = P(S > n + 1)$ .

En conclusion, on a  $P(S > n + 2) = \frac{1}{4}P(S > n) + \frac{1}{2}P(S > n + 1)$  et donc  $\boxed{q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}}.$

10. Les racines sont  $\boxed{r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}.$

11. Montrons que le système proposé est de Cramer. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice associée à ce système est inversible en calculant son déterminant :

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2 (r_2 - r_1) = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \neq 0.$$

$\boxed{\text{Il existe donc un unique couple } (\alpha, \beta) \text{ solution du système donné.}}$

12.  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée est  $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}$ . Les solutions de cette équation sont  $r_1$  et  $r_2$ . D'après notre cours, on sait qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

En évaluant pour  $n = 1$  et  $n = 2$  on trouve que  $\lambda$  et  $\mu$  sont solutions du système de la question 11.

Or on a prouvé que ce système admet une unique solution que nous avons noté  $(\alpha, \beta)$  donc  $\lambda = \alpha$  et  $\mu = \beta$ .

En conclusion,  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}.$

13. On a  $\frac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \rightarrow 0$  car  $|r_1| < r_2$  donc  $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$ .

On peut alors écrire  $q_n = \beta r_2^n \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n + 1\right)$  et en déduire que  $\boxed{q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta r_2^n}.$

# Problème : G2E 2023

## Partie A : matrices d'ajout

1. a) Les valeurs présentes dans la matrice  $A$  signifient que si on tire une boule noire, on ajoute 3 boules noires dans l'urne et 0 boule blanche et si l'on tire une boule blanche, on ajoute 1 boule noire et 2 boules blanches. Donc, dans la situation présentée dans cette question, à l'étape suivante

l'urne contient 6 boules noires et 5 boules blanches.

- b) Par définition,  $\sigma_A = 3 + 0 = 1 + 2 = 3$ .  $\sigma_A$  représente le nombre total de boules ajoutées dans l'urne à chaque étape.

À chaque étape on ajoute 0 ou 2 boules blanches, donc un nombre paire de boules blanches. Sachant qu'il y a initialement 1 boule blanche dans l'urne, il y aura donc toujours un nombre impair de boules blanches dans notre urne.

Il est impossible d'avoir 22 boules blanches et 20 boules noires.

2. a) (i) Montrons que  $\mathcal{B}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Par définition de  $\mathcal{B}$ , on a bien  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - La matrice nulle est bien une matrice à coefficients réels qui vérifie que la somme des éléments de la première ligne est égale à la somme des éléments de la deuxième ligne. Donc  $O_2 \in \mathcal{B}$ .
  - Soit  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{B}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
On note  $M = \begin{pmatrix} x_M & y_M \\ z_M & t_M \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} x_N & y_N \\ z_N & t_N \end{pmatrix}$ . On a alors

$$M + \lambda N = \begin{pmatrix} x_M + \lambda x_N & y_M + \lambda y_N \\ z_M + \lambda z_N & t_M + \lambda t_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et

$$\begin{aligned} x_M + \lambda x_N + y_M + \lambda y_N &= x_M + y_M + \lambda(x_N + y_N) \\ &= z_M + t_M + \lambda(z_N + t_N) && \text{car } M, N \in \mathcal{B} \\ &= z_M + \lambda z_N + t_M + \lambda t_N. \end{aligned}$$

Donc  $M + \lambda N \in \mathcal{B}$ .

$\mathcal{B}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donc  $\mathcal{B}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Autre méthode :  $\mathcal{B} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ .

- (ii) On peut remarquer que  $I_2 \in \mathcal{A}$  et pourtant  $-I_2 \notin \mathcal{A}$  (car les coefficients ne sont pas des entiers naturels). Cela contredit l'une des propriétés d'un espace vectoriel.

$\mathcal{A}$  n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- b) Soit  $A \in \mathcal{A}$  telle que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a

$$\sigma_A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0,$$

car  $a, b, c$  et  $d$  sont des entiers naturels (une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si chaque nombre est nul).

On a donc  $\sigma_A = 0 \Leftrightarrow A = O_2$ .

3. a) Il suffit de remarquer que  $a + b = c + d \Leftrightarrow a - c = d - b$ .

On a donc bien, pour  $A \in \mathcal{A}$ ,  $a - c = d - b$ .

- b) Par définition :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= ad - bc \\
&= ad + bd - bd - bc \\
&= d(a + b) - b(d + c) \\
&= d\sigma_A - b\sigma_A \\
&= \sigma_A(d - b) \\
&= \sigma_A\delta_A.
\end{aligned}$$

On a bien  $\boxed{\det(A) = \sigma_A\delta_A.}$

c) On a

$$\begin{aligned}
AA' &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} && \text{calcul du produit} \\
&= \det(A)I_2 && \text{définition du déterminant} \\
&= \sigma_A\delta_AI_2 && \text{question précédente.}
\end{aligned}$$

On a bien  $\boxed{AA' = \sigma_A\delta_AI_2.}$

d) On sait, d'après notre cours, que  $A$  est inversible si, et seulement si,  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas,  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A'$ .

En ajoutant la contrainte  $A^{-1} \in \mathcal{A}$ , cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \\ \frac{d}{\sigma_A\delta_A} \in \mathbb{N} \\ \frac{-b}{\sigma_A\delta_A} \in \mathbb{N} \\ \frac{-c}{\sigma_A\delta_A} \in \mathbb{N} \\ \frac{a}{\sigma_A\delta_A} \in \mathbb{N} \\ \frac{d-b}{\sigma_A\delta_A} = \frac{a-c}{\sigma_A\delta_A} \end{array} \right.$$

Comme  $\sigma_A$  est supérieur ou égal à tous les coefficients de la matrice, on a  $0 \leq \frac{a}{\sigma_A} \leq 1$  (et de même avec  $b$ ,  $c$  et  $d$ ).

Donc,  $\frac{a}{\sigma_A\delta_A} \leq 1$  (et de même avec  $-b$ ,  $-c$  et  $d$ ) donc  $\frac{a}{\sigma_A\delta_A} \in \mathbb{N}$  si, et seulement si  $\frac{a}{\sigma_A\delta_A} = 0$  ou  $1$ . On peut raisonner de même pour les autres fractions. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \\ \frac{d}{\sigma_A\delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{-b}{\sigma_A\delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{-c}{\sigma_A\delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{a}{\sigma_A\delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{d-b}{\sigma_A\delta_A} = \frac{a-c}{\sigma_A\delta_A} \end{array} \right.$$

Les lignes 2 à 5 de ce système nous donnent 16 choix possibles pour les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . En mettant en lien ces matrices avec les contraintes des lignes 1 et 6 du système, il ne nous restera que 2 matrices possibles.

Par exemple, le cas  $a = b = c = d = 0$  est impossible car le déterminant est alors nul. Pour la même raison on ne peut pas avoir  $a = b = 0$  ou alors  $c = d = 0, \dots$

Après avoir éliminé tous les cas où le déterminant est nul il nous reste encore 6 options :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_A\delta_A \\ -\sigma_A\delta_A & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & 0 \\ -\sigma_A\delta_A & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & -\sigma_A\delta_A \\ -\sigma_A\delta_A & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & -\sigma_A\delta_A \\ 0 & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_A \delta_A & 0 \\ 0 & \sigma_A \delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_A \delta_A \\ -\sigma_A \delta_A & 0 \end{pmatrix}.$$

Les 4 premières matrices ne respectent pas le fait que la somme des coefficients de la première ligne est égale à la somme des coefficients de la deuxième ligne (car  $\sigma_A \delta_A \neq 0$ ).

Il nous reste donc 2 candidats. En remarquant que  $\sigma_A \delta_A = \det(A)$  et que

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_A \delta_A & 0 \\ 0 & \sigma_A \delta_A \end{pmatrix} = (\sigma_A \delta_A)^2 = (\det(A))^2, \text{ et } \det \begin{pmatrix} 0 & \sigma_A \delta_A \\ \sigma_A \delta_A & 0 \end{pmatrix} = -(\sigma_A \delta_A)^2 = -(\det(A))^2,$$

on en déduit que, dans le premier cas  $\det(A) = 1$  et donc  $a = d = 1$  et dans le second cas  $\det(A) = -1$  et donc  $b = c = 1$ .

En résumé, si  $A$  est inversible et  $A^{-1} \in \mathcal{A}$  alors  $A = I_2$  ou  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Réciproquement, ces deux matrices sont bien dans  $\mathcal{A}$ , inversible et leur inverse est dans  $\mathcal{A}$ .

Donc

$$\boxed{\begin{cases} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow A = I_2 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Partie B

4. a) À chaque étape le nombre de boules noires reste identique ou augmente de  $\sigma$ . Dans le pire des cas au bout des  $n$  étapes, on n'a rajouté aucune boule noire, dans le meilleur des cas on a rajouté  $n\sigma$  boules noires et on rajoute toujours un multiple de  $\sigma$  boules noires.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}, S_n(\Omega) = \{1 + k\sigma/k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

D'après l'énoncé  $S_0 = 1$ , et pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, le nombre de boules noires rajoutées à l'issue du  $n+1$  tirage est  $\sigma$  si  $X_{n+1} = 1$  et 0 si  $X_{n+1} = 0$ . Dans tous les cas le nombre de boules noires rajoutées est égal à  $\sigma X_{n+1}$

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{déjà présentes}} + \underbrace{\sigma X_{n+1}}_{\text{rajoutées}}$$

$$\boxed{S_0 = 1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}.$$

- b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $s \in S_n(\Omega)$ . Supposons  $[S_n = s]$  réalisé alors lors des  $n$  premières étapes ont été rajoutées  $s-1$  boules noires et comme la matrice d'ajout est équilibrée  $n\sigma$  boules des deux couleurs ont été rajoutées. Lors du tirage  $n+1$  l'urne est composée de  $s$  boules noires et  $2 + n\sigma$  boules au total.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } s \in S_n(\Omega), P_{[S_n=s]}(X_{n+1} = 1) = \frac{s}{2 + n\sigma}.$$

5. a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , en utilisant le théorème des probabilité totales avec le système complet d'événements  $([S_n = s])_{s \in S_n(\Omega)}$ .

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) P_{[S_n=s]}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) \frac{s}{2 + n\sigma} && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{2 + n\sigma} \sum_{s \in S_n(\Omega)} s P(S_n = s) \\ &= \frac{1}{2 + n\sigma} E(S_n) && \text{définition d'une espérance} \end{aligned}$$

Comme de plus  $X_{n+1}(\Omega) = \{0; 1\}$

$$E(X_{n+1}) = 0P(X_{n+1} = 0) + 1P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1)$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = \frac{1}{2+n\sigma} E(S_n).$$

b) D'après la question 4.a) et en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}) &= E(S_n) + \sigma E(X_{n+1}) \\ &= E(S_n) + \sigma \frac{E(S_n)}{2+n\sigma} && \text{question précédente} \\ &= \frac{2+\sigma(n+1)}{2+n\sigma} E(S_n) \end{aligned}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose

$$\mathcal{H}_n : E(S_n) = \frac{2+\sigma n}{2}$$

**Initialisation**  $S_0$  est la variable certaine égale à 1 (question 4.a)) donc

$$E(S_n) = 1 = \frac{2+0\sigma}{2}$$

**Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie, alors

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}) &= \frac{2+\sigma(n+1)}{2+n\sigma} E(S_n) && \text{calcul précédent} \\ &= \frac{2+\sigma(n+1)}{2+n\sigma} \times \frac{2+n\sigma}{2} && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{2+(n+1)\sigma}{2} \end{aligned}$$

**Conclusion** D'après le principe de récurrence :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, E(S_n) = \frac{2+\sigma n}{2}.$$

**Remarque** On pourrait raisonner à l'aide d'un produit télescopique mais l'énoncé demande de rédiger une récurrence.

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  prend pour valeurs 0 et 1, donc suit une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  où  $p = E(X_n)$ . D'après la question 5.a) et comme  $n-1 \in \mathbb{N}$

$$E(X_n) = \frac{E(S_{n-1})}{2+\sigma(n-1)}$$

En utilisant le résultat de la question précédente

$$p = \frac{\frac{2+\sigma(n-1)}{2}}{2+\sigma(n-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, X_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 1/2.$$

## BONUS

6. Soit  $A \in \mathcal{A}$  telle que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' \in \mathcal{A}$  telle que  $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ .

$$\text{On a alors } A + kA' = \begin{pmatrix} a+ka' & b+kb' \\ c+kc' & d+kd' \end{pmatrix}.$$

Comme  $k$  est un entier naturel on a bien ici une matrice à coefficients entiers naturels.

De plus,  $a+ka'+b+kb' = a+b+k(a'+b') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$  et  $c+kc'+d+kd' = c+d+k(c'+d') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$ .

On a donc bien  $A + kA' \in \mathcal{A}$ .

7. Soit  $A \in \mathcal{A}$  telle que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' \in \mathcal{A}$  telle que  $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ .

On a alors  $AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ .

$AA'$  est bien une matrice à coefficients entiers naturels.

De plus,  $aa' + bc' + ab' + bd' = a(a' + b') + b(c' + d') = a\sigma_{A'} + b\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}$ .

Et  $ca' + dc' + cb' + dd' = c(a' + b') + d(c' + d') = c\sigma_{A'} + d\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}$ .

Donc  $\boxed{AA' \in \mathcal{A}}$ .