

Intégration

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Janvier 2026

Table des matières

I Définitions et propriétés	2
I.1 Premières définitions	2
I.2 Extension à un intervalle du type $]a; b]$ ou $]a; b[$	3
I.3 Extension des opérations vues en première année	4
I.4 Fonctions paires et impaires	6
I.5 Convergence absolue	7
II Intégrales de fonctions positives, critères de convergence	8

Dans toute la suite les fonctions sont définies sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

I Définitions et propriétés

I.1 Premières définitions

Définition 1 (Intégrale impropre ou généralisée en b).

Soit f une fonction continue sur $[a; b[$, avec a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si

et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$ existe et est réelle. On note alors

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \dots$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Définition 2 (Nature d'une intégrale).

Déterminer la nature d'une intégrale c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Notations On pourra utiliser les notations

$$\int_a^b f \quad \int_a^b f(t) dt \quad \int_I f \quad \int_I f(t) dt \quad \int_{[a; b[} f \quad \int_{[a; b[} f(t) dt$$

Attention : ces notations désignent la valeur de l'intégrale si elle converge, mais on peut aussi écrire $\int_I f$ diverge.

Proposition 1 (Prolongement par continuité).

Si f est continue sur $[a; b]$ alors $\int_{[a; b[} f$ converge et

$$\int_{[a; b[} f = \int_{[a; b[} f$$

Proposition 2 (Choix de la borne a).

Soit f une fonction continue sur $[a; b[$ et $a' \in [a; b[$ alors

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge si et seulement si } \int_{a'}^b f(t) dt \text{ converge}$$

Attention : Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ partagent la même nature (elles convergent) mais pas la même valeur.

I.2 Extension à un intervalle du type $]a; b]$ ou $]a; b[$.

Définition 3 (Intégrale sur un intervalle $]a; b]$).

Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement

si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ existe et est réelle.

On note alors :

$$= \int_a^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exercice 1.

Montrer que

- $\int_0^1 dt/t$ diverge
- $\int_0^1 dt/\sqrt{t}$ converge.

Définition 4 (Intégrale sur un intervalle $]a; b[$).

Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $c \in]a; b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent et dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Proposition 3 (Indifférence au choix du point de découpage, Chasles).

Soit f une fonction continue sur $]a; b[$.

La nature et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$ ne dépend pas du choix du point c utilisé dans la définition précédente.

Démonstration :

C'est à dire si au moins l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ diverge

Exercice : En choisissant bien le point de découpage calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-1|} dt$$

Définition 5 (Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points).

Dans ce cas là on étudie la convergence de l'intégrale sur chacun des intervalles où f est continue et en cas de convergence on somme chacune des intégrales.

Exemple : Étudions l'intégrale sur $[-1; 1]$ de $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 (Intégrale Gaussienne).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Démonstration :
admis



I.3 Extension des opérations vues en première année

Dans la suite I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

Proposition 4 (Linéarité).

Soit f et g deux fonctions continues sur I et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent et λ un réel alors $\int_I f + \lambda g$ converge et

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$$

Démonstration :

5

Proposition 5 (Positivité et croissance).

Soit f et g deux fonctions continues sur I et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité On suppose de plus que f est à valeurs positives i.e. $\forall x \in I, f(x) \geq 0$, alors

$$\int_I f \geq 0$$

Stricte positivité On suppose de plus que f est positive et non nulle c'est à dire
alors

$$\int_I f > 0$$

Croissance On suppose de plus que $f \geq g$ i.e.

, alors

$$\int_I f \geq \int_I g$$

Démonstration :

6

Théorème 2 (Intégration par parties).

Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que le produit fg admet une limite réelle en a et b alors

- Les intégrales $\int_{]a; b[} f'g$ et $\int_{]a; b[} fg'$ ont même nature.

- En cas de convergence

$$\int_{]a; b[} f' g = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) g(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > a}} f(x) g(x) - \int_{]a; b[} f g'$$

Ce que l'on peut écrire

$$\int_{]a; b[} f' g = [f g]_a^b - \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > a}} f(x) g(x) - \int_{]a; b[} f g'$$

Remarque : Grace à la proposition 1 , on peut fermer l'une des deux bornes.

Théorème 3 (Changement de variable).

Si la fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites

$\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β , alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ et

$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ sont de même nature, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.

Démonstration :

9

Exemple : Calculons $\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} dt$.

1.4 Fonctions paires et impaires

On donne les résultats pour des fonctions définies et continues sur \mathbb{R} , ils peuvent être adaptés à d'autres cas.

Proposition 6 (Fonction paire).

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et paire, alors les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f$, $\int_{\mathbb{R}_+} f$ et $\int_{\mathbb{R}_-} f$ ont même nature, et en cas de convergence

$$\int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_-} f \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f = 2 \int_{\mathbb{R}_+} f$$

Démonstration :

5

Proposition 7 (Fonction impaire).

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et impaire, alors les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f$ ont même nature, et en cas de convergence

$$\int_{\mathbb{R}_-} f = \int_{\mathbb{R}_+} f \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f = 0$$

Démonstration :

5

I.5 Convergence absolue

Définition 6 (Convergence absolue).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I on dit que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument si et seulement si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

Théorème 4 (Lien entre convergence absolue et convergence).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I on suppose que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument alors cette intégrale converge. On a de plus

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

II Intégrales de fonctions positives, critères de convergence

Les deux théorèmes suivants vont nous servir toutes l'année!

Attention : Il est indispensable de vérifier que les fonctions étudiées sont à valeurs positives et de le faire apparaître clairement dans vos réponses.

Théorème 5 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas des inégalités).
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Dans ce cas là

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge aussi.

Ce théorème s'adapte aux autres cas d'intégrales impropres.

Démonstration :

5

Théorème 6 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas de la relation d'équivalence).

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\quad 0 \leq f(t) \leq t \leq g(t)$$

On suppose de plus que

$$f(x) \sim_b g(x)$$

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ ont même nature.

Ce théorème s'adapte aussi aux autres cas d'intégrales impropres.

Démonstration :

5

Autres cas

Lorsqu'une intégrale est impropre en plus d'un point il faut « découper » cette intégrale.

Exemple :

- Pour étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$, il faut étudier les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$
- Pour étudier la nature de $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$, il faut étudier les intégrales $\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$ et $\int_{-1/2}^0 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$
et $\int_0^{1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$ et $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$

Savoir et Savoir-faire

À la fin de ce cours vous devez savoir

Étudiez par le calcul les convergences des intégrales classiques Riemann, exponentielles.

Démontrer une convergence en utilisant les relations de comparaisons \sim et \leq .

Calculer une intégrale impropre en utilisant les techniques IPP et changement de variable.

On fera bien attention à la rédaction.