INTÉGRATION

Calculs

Exercice 1.
En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 (Intégrales classiques, À SAVOIR FAIRE)**.**

- **Intégrales de Riemann**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- **Intégrales de Riemann**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- **Exponentielles**.
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

Exercice 3.
En utilisant des changement de variables ou des IPP déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3-t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t}$ (IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^t}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (IPP)

Exercice 4 (Fraction rationnelle)**.**

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.
   (a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Exercice 5 (Bien choisir le découpage)**.**
Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-|t-1|}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-a|}$ où a est une constante.

Théorèmes de comparaisons

Exercice 6.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes? On pourra utiliser les résultats de l'exercice 2

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\sim$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: $\leqslant$ ou $\sim$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x$: utiliser $\sim$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 7.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 8 (Plus dur)**.**
Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 9.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)(1+x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-t}}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 10.
Pour chacune des intégrales suivantes étudier si elle converge ou non.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Mélangés

Exercice 11 (Calculs)**.**
Calculer, si elles convergent les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 12 (Fractions rationnelle)**.**

1. Trouver a b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$
2. Soit $a > 0$, En déduire la valeur de $\int_a^1 \dfrac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$
3. En utilisant des équivalents calculer
$$\lim_{x\to 0} \ln(x)\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)$$
4. En déduire la nature et la valeur éventuelle $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 13 (▲ Une récurrence)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge
$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{(\ln t)^n}{t^2}\left(t\sqrt{t}\right) = 0$.
3. En déduire qu'il existe un réel A tel que
$$\forall x \in [A; +\infty[\qquad \frac{(\ln t)^n}{t^2} \leqslant \left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$$
4. En déduire que les intégrales sont convergentes.
5. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$
6. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
7. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (Autour de l'intégrale gaussienne)**.**
En utilisant la valeur de l'inégrale Gaussienne, des changement de variable et des IPP, et des remarques de parité calculer

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 15.
On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.
2. En déduire que l'intégrale converge.
3. Trouver trois constantes a, b et c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale

Exercice 16 (▲ Changement de variable)**.**

1. Montrer que pour $t \in [0; +\infty[$, $\ln t \leqslant \sqrt{t}$
2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ converge.
3. En utilisant le changement de variables $u = 1/t$, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ converge et donner sa valeur en fonction de l'intégrale précédente.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$.
5. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Pour aller plus loin

Exercice 17.
Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 18 (Intégrales à paramètres (dur et long))**.**
Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ où $m\in\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^\alpha\ln\left(1+x^\beta\right)\mathrm{d}x$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Exercice 19 (Un calcul un peu compliqué mais détaillé)**.**
On pose

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x\in\,]0;1[\\ f(0)=0 & \\ f(1)=1 & \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est elle convergente ?
3. Soit $x\in\,]0;1[$. En posant $u=t^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^x\frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln t}=\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
5. Montrer que pour tout $t\in\left[x^2;x\right]$, on a
$$\frac{x}{t\ln t}\leqslant\frac{t}{t\ln t}\leqslant\frac{x^2}{t\ln t}$$
6. En déduire que
$$x^2\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\leqslant x\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
7. Trouver une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{t\ln t}$
8. En utilisant le théorème des gendarmes montrer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\ln 2$$

Exercice 20.
Soient $0<a<b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $0<x<y$. Démontrer que
$$\int_x^y\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{ay}^{by}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z>0$,
$$\mathrm{e}^{-bz}\ln\frac{b}{a}\leqslant\int_{az}^{bz}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$
En déduire que
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt=\ln\frac{b}{a}$$

Exercice 21.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$. On pourra comparer avec $\frac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.
2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de
$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)$$
3. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.
4. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)$. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 (Logarithme à la puissance n)**.**
Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n=\displaystyle\int_0^1(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.