

DM 05 vad

BCPST Spé 2

à rendre le mercredi 08 novembre

FORMULE DU BINÔME NÉGATIF

Partie I. Formule du binôme négatif.

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tels que $0 \leq r \leq n$, on rappelle la formule du "triangle de Pascal" :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Montrer que pour tout entier r de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^n \binom{k-1}{r-1}$$

2. Soit (n, r) un couple d'entiers naturels, tels que $1 \leq r \leq n$. Pour tout réel x de $]0, 1[$, on définit la fonction $f_{r,n}$ par :

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} x^k$$

(a) Montrer, pour tout réel x de $]0, 1[$, l'égalité :

$$(1-x)f_{r,n}(x) = xf_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}$$

(b) On suppose l'entier r fixé. Montrer¹, lorsque n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

3. Soit x un réel fixé de $]0, 1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et déterminer la valeur de cette limite.

(a) Justifier l'existence et donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{0,n}(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{1,n}(x)$.

(b) Soit r un entier naturel non nul. On suppose que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{r-1,n}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}.$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

Nous venons de démontrer

$$\text{Pour tout } x \in]0, 1[\text{ et pour tout } r \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

Partie II. Développement en série de $\ln(1-x)$

Soit x un réel de $]0, 1[$

1. Montrer, pour tout entier n de \mathbb{N}^* , l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

2. À l'aide d'un encadrement simple, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

3. En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

1. question classique

LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

On dispose d'une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules rouges, avec

$$p \in]0; 1[\quad pN \in \mathbb{N} \quad q = 1 - p$$

On note $N_b = pN$ le nombre de boules blanches et $N_r = qN$ le nombre de boules rouges.

On tire $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ boules successivement et sans remise, et on note X le nombre de boules blanches obtenues

1. Écrire une fonction python `simulation(n, nb_blanche, nb_rouges)` qui simule cette expérience attention ici `nb_blanches` désignera le nombre de boules blanches et non la proportion. *idem* pour `nb_rouges`.
2. Montrer que $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. Puis que le nombre de boules blanches tirées est forcément compris entre $\min(0, n - N_r)$ et $\max(n, N_b)$
3. Soit un entier k vérifiant cette condition, montrer que le nombre de tirages de n boules qui donnent k boules blanches est

$$\binom{n}{k} \frac{pN!}{(pN - k)!} \frac{qN!}{(qN - (n - k))!}$$

4. Dédurre que pour ce même k

$$P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

5. Expliquer brièvement pourquoi cette formule reste vraie pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$
6. En utilisant le fait que $(\{X = i\})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements et en notant $N_b = a$ $N_r = b$ démontrer la formule de Vandermonde

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

7. Montrer que pour tout entier naturel k non nul et pour tout entier naturel n

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

8. En déduire que $E(X) = np$
9. Montrer que $V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{n-1}$
10. Montrer que si les tirages ont lieu simultanément la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées suit la même loi.