DM 11 :

Bio Spé

Réponses

Problème : endomorphismes cycliques

Partie I :

1. (a) On a $A \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\alpha(\overrightarrow{a}) = (-10, -1)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\alpha(\overrightarrow{a})$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $(\overrightarrow{a}, \alpha(\overrightarrow{a}))$ est libre.

   Ainsi la famille $(\overrightarrow{a}, \alpha(\overrightarrow{a}))$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et Dim $(\mathbb{R}^2) = 2$ donc la famille $(\overrightarrow{a}, \alpha(\overrightarrow{a}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   Ainsi α est cyclique.

   (b) On a $\alpha^2(\overrightarrow{a}) = \alpha(\alpha(\overrightarrow{a})) = \alpha((-10, -1))$.

   Or $A \times \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\alpha^2(\overrightarrow{a}) = (-34, -9)$.

   On a alors

$$\alpha^2(\overrightarrow{a}) = x\overrightarrow{a} + y\alpha(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow (-34, -9) = (2x - 10y, 3x - y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = -34 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

   Donc $\alpha^2(\overrightarrow{a}) = -2\overrightarrow{a} + 3\alpha(\overrightarrow{a})$.

   (c) On a : $\alpha(\overrightarrow{a}) = 0\overrightarrow{a} + 1\alpha(\overrightarrow{a})$ et $\alpha(\alpha(\overrightarrow{a})) = -2\overrightarrow{a} + 3\alpha(\overrightarrow{a})$.

   Donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (d) Par définition Ker $(\alpha - 2id) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\alpha - 2id)(x, y) = (0, 0)\}$.

Or on a

$$(\alpha - 2id)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (A - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 6y \\ x - 3y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y$$

Donc Ker $(\alpha - 2id) = \{(3y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((3,1))$.

La famille $((3,1))$ est une famille génératrice de Ker $(\alpha - 2id)$ et libre (un seul vecteur non nul).

Donc $((3,1))$ est une base de Ker $(\alpha - 2id)$.

(e) On pose $\overrightarrow{b} = (3,1)$. D'après la question précédente $\alpha(\overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{b}$, donc la famille $(\overrightarrow{b}, \alpha(\overrightarrow{b}))$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$.

2. (a) On peut remarquer que :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2$$

B est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 3 donc B est inversible.

Donc *(propriété du cours)* β est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$.

(b) Commençons tout d'abord par raisonner avec les matrices. On a :

$$B^2 - 3B + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -18 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

On a donc montré que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\beta^2) - 3\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\beta) + 2\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(id) = 0_3$, c'est-à-dire que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\beta^2 - 3\beta + 2id) = 0_3$, ce qui nous permet d'affirmer que $\beta^2 - 3\beta + 2id = 0$.

(c) La question précédente nous permet de dire qu'il est impossible de trouver un vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que la famille $(\overrightarrow{x}, \beta(\overrightarrow{x}), \beta^2(\overrightarrow{x}))$ soit libre.

En effet, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on vient de montrer que $\beta^2(\overrightarrow{x}) - 3\beta(\overrightarrow{x}) + 2\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ce qui montre que la famille $(\overrightarrow{x}, \beta(\overrightarrow{x}), \beta^2(\overrightarrow{x}))$ est liée.

En conclusion β n'est pas cyclique.

Partie II :

1. (a) Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a : $\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$.

Le terme de plus haute puissance est donc $\binom{k}{k-1} X^{k-1}$ et comme $\binom{k}{k-1} \neq 0$, on a donc bien montré que $\deg(\delta(X^k)) = k-1$.

(b) Soit P un polynôme quelconque de degré $p \geqslant 1$. On sait que P est une combinaison linéaire de la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^p)$, le coefficient a_p de X^p étant non nul.

Et comme δ est un endomorphisme, on sait alors que $\delta(P)$ est une combinaison linéaire de la famille $(\delta(1), \delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^p))$ avec les mêmes coefficients.

Or dans la question précédente, on a montré que pour $k \geqslant 1, \quad \delta(X^k)$ est exactement de degré $k-1$ et de plus $\delta(1)$ est le polynôme nul.

Ainsi $\delta(X)$ est de degré 0, $\delta(X^2)$ est de degré 1, …, $\delta(X^p)$ est de degré $p-1$. Donc $a_p\delta(X^p)$ est de degré $p-1$ (car $a_p \neq 0$) et le reste de la combinaison linéaire est de degré $\leqslant p-2$ donc en ajoutant, comme les degrés sont différents, $\deg(\delta(P))$ est le maximum des degrés.

En conclusion $\delta(P)$ est de degré $p-1$.

On a bien $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.

(c) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: $\deg(\delta^k(X^{n-1})) = n-k-1$ est vraie pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.

- Pour $k = 0$: comme $\delta^0(X^{n-1}) = X^{n-1}$ la propriété $\mathscr{P}(0)$ est bien vraie.
- Soit $k \in [\![0; n-2]\!]$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
  On a : $\deg(\delta^{k+1}(X^{n-1})) = \deg(\delta(\delta^k(X^{n-1}))) = \deg(\delta^k(X^{n-1})) - 1 = n-k-1-1 = n-k-2$.
  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est bien vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$,
$\deg(\delta^k(X^{n-1})) = n-k-1$

Ainsi la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \ldots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ est une famille de polynômes de degrés distincts, ne contenant pas le polynôme nul, donc c'est une famille libre.

De plus la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \ldots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ contient n vecteurs et Dim $(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.

En conclusion la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \ldots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ainsi
δ est cyclique.

2. (a) Par définition, Ker $(\delta) = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \delta(P) = 0\}$.

Or on a montré que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ dès que P est de degré supérieur ou égal à 1. Ainsi il n'existe aucun polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 tel que $\delta(P) = 0$.

On a donc Ker $(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Inversement, on remarque facilement que si P est un polynôme constant, on a bien $\delta(P) = 0$.

Donc $\mathbb{R}_0[X] \subset$ Ker (δ) et finalement Ker $(\delta) = R_0[X]$.

(b) Par définition, $\mathrm{Im}(\delta) = \{\delta(P) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

Or on a vu que si P est constant, $\delta(P) = 0$, et si P est de degré supérieur ou égal à 1,
$\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \leqslant n-1-1 = n-2$.

Donc on a bien $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(c) On a vu que Ker $(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$, donc Dim (Ker (δ)) = 1.

D'après le théorème du rang, Dim (Ker (δ)) + Dim $(\mathrm{Im}(\delta))$ = Dim $(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.

Donc Dim $(\mathrm{Im}(\delta)) = n-1$.

De plus, on a déjà montré que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et on vient de montrer que
Dim $(\mathrm{Im}(\delta))$ = Dim $(\mathbb{R}_{n-2}[X])$.

On a donc $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

3. (a) La famille $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ est une famille de polynômes de degrés distincts, ne contenant pas le polynôme nul, donc c'est une famille libre.

De plus la famille $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ contient n vecteurs et Dim $(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.

En conclusion la famille $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(b)

- On a :

$$\begin{aligned}
\delta(R_j) = R_j(X+1) - R_j(X) &= \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X+1-k) - \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k)\\
&= \frac{1}{j!}\prod_{k=-1}^{j-2}(X-k) - \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k) \quad \text{(changement d'indice dans le premier produit)}\\
&= \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-2}(X-k) \times \big((X+1)-(X-j+1)\big)\\
&= \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-2}(X-k) \times j\\
&= \frac{1}{(j-1)!}\prod_{k=0}^{j-2}(X-k) = R_{j-1}(X)
\end{aligned}$$

  On a donc bien $\delta(R_j) = R_{j-1}$.

- On peut facilement montrer par récurrence que si $i \leqslant j$, $\delta^i(R_j) = R_{j-i}$ et si $i > j$, $\delta^i(R_j) = 0$.

(c) D'après la question précédente, la famille $(R_{n-1}, \delta(R_{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(R_{n-1}))$ est donc en fait la famille $(R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_0)$ qui est, d'après la question 3. a), une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On a donc de nouveau démontré que δ est cyclique.