DM 12

Bio Spé

à rendre le lundi 12 janvier

Exercice 1 : fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall t \in [0;x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leqslant \dfrac{1}{e^t+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
   (b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : suite d'intégrales

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Montrer que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0;1]$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

   (b) Montrer que $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{n+2}$ $\quad$ et en déduire un encadrement de I_n.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.