DM 12 :

Bio Spé

Réponses

Exercice 1 : fonction définie par une intégrale

1. (a) Soit $x \in]0;+\infty[$. Pour tout $t \in [0;x]$, on a :

$$0 \leqslant t \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant e^t \leqslant e^x \Leftrightarrow 2 \leqslant e^t+1 \leqslant e^x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^t+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

On a bien $\boxed{\frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^t+1} \leqslant \frac{1}{2}}$

(b) En multipliant l'inégalité de la question précédente par $t \in [0;x]$, on a $\frac{t}{e^x+1} \leqslant \frac{t}{e^t+1} \leqslant \frac{t}{2}$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, comme $0 < x$ on peut intégrer sur $[0;x]$ l'inégalité précédente et on obtient :

$$\int_0^x \frac{t}{e^x+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}\frac{x^2}{2} \leqslant \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

Pour la dernière équivalence on a multiplié les membres de l'encadrement par $\frac{2}{x^2}$ qui est un réel positif.

$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}.}$

(c) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.
Or $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

2. (a)

- Comme $t \mapsto e^t+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions continue.
  La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$ est la primitive de $t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$ qui s'annule en 0. Comme nous venons de dire que $t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
  De plus $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ est un fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc en particulier sur $]0;+\infty[$.
  Ainsi par produit, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[.}$

- De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt + \frac{2}{x^2}\frac{x}{e^x+1} = -\frac{4}{x^3}\left(\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}\right)$$

Donc on a $\boxed{f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) \text{ avec } g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}.}$

(b)

- g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{x}{e^x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2}$$

Donc $g'(x) > 0$, et ainsi $\boxed{g \text{ est croissante sur }]0;+\infty[.}$

- De plus $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ g(x) \geqslant 0.}$

On pourra remarquer aussi qu'avec l'aide de la question 1.b), on a directement le signe de $g(x)$.

- Comme $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$ et que $g(x) \geqslant 0$, on a $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or on a montré que f est continue en 0.

$\boxed{f \text{ est donc décroissante sur } \mathbb{R}^+.}$

3. (a) On pose $h(t) = e^t + 1 - t$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(t) = e^t - 1 \geqslant 0$. Donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $h(0) = 2$, on a pour tout $t \geqslant 0$,

$$h(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^t + 1 - t \geqslant 0 \Leftrightarrow e^t + 1 \geqslant t \Leftrightarrow \frac{t}{e^t+1} \leqslant 1 \text{ car } e^t + 1 > 0$$

On a donc $\boxed{\text{pour tout } t \geqslant 0,\ \frac{t}{e^t+1} \leqslant 1.}$

(b) D'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \frac{t}{e^t+1} \leqslant 1$.

En intégrant la relation précédente sur $[0;x]$ avec $x > 0$, on obtient $0 \leqslant \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \leqslant x$ puis en multipliant par $\frac{2}{x^2}$ qui est un réel positif, on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x}$.

Enfin comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

Exercice 2 : suite d'intégrales

1. $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.
2. (a) Pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \geqslant 0$ et comme $x + 1 \geqslant 1$, $\ln(x+1) \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.

(b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$. Or pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, et ainsi la suite (I_n) est décroissante.

(c) (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

3. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(x+1) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$. Comme $x^n \geqslant 0$, on en déduit que, pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(x+1) \leqslant x^n$.

(b) On peut intégrer l'inégalité précédente sur $[0;1]$ et on obtient $I_n \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$.

(c) On a donc démontré que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

4. (a) On pose :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x+1) & u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$. En intégrant on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

Grâce à la question précédente on obtient :

$$\frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(c) D'après la question précédente :

$$\frac{n\ln 2}{n+1} - \frac{n}{(n+2)(n+1)} \leqslant nI_n \leqslant \frac{n\ln 2}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\ln 2}{n+1} = \ln 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{(n+2)(n+1)} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \ln 2$.