

- À partir du 24 (hors week-end) : faire chaque jour un exercice, avancer un peu le DM et reprendre les chapitres qui sont encore fragiles.

Consignes de travail et début d'année

BCPST2

Vous connaîtrez la classe où vous êtes affectés à la rentrée. Le travail à faire et les conseils sont identiques dans les deux cas, seuls changera la date des premiers cours et de la première interrogation. Pour toute(s) question(s) vous pouvez nous joindre par mail :

etournesac@gmail.com ou bcpst@lafond.eu

Début d'année

- Vous devez avoir révisé vos cours de sup sur les polynômes, les fonctions (continuité, dérivabilité, fonctions usuelles, calculs de limites, développement limités...) et les suites. Vous pourrez aussi vous aider de la fiche résumée sur les fonctions qui vous a été distribuée.
- Préparer TOUS les exercices de la feuille de TD « Limites, continuité, ... »
- Rédiger sur une (ou plusieurs) copie(s) double(s) le problème ci-dessous.
- Le 5 septembre ou 6 septembre vous aurez une petite interrogation sur des calculs très basiques : manipulations d'inégalités, calculs avec des puissances et des fractions, calculs de limite simples, calculs de dérivées... , ainsi que des questions de cours sur le contenu de la fiche de résumé.

Conseils pour organiser vos révisions

- Les 21, 22, 23 août : réviser vos cours de sup, et, si besoin, faire vos propres petites fiches avec les théorèmes les plus importants, les formules (dérivées, limites, trigonométrie, équivalents, développements limités ...)

DM1

à rendre le jour de la rentrée

Il ne faut pas hésiter à nous demander des indications par mail !

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x) = \frac{1}{\cos x}$, ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\pi/4} [f(x)]^n dx$$

Étude de la bijection réciproque de f .

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .
4. Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$$

5. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Étude des dérivées successives de f .

7. Justifier que f est de classe C^∞ sur I , on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur I .
8. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

9. Déterminer les fonction polynomiales P_1 et P_2 .

10. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I \quad P_{n+1}(x) = (1 - x^2)P'_n(x) + (n+1)x.P_n(x)$$

En déduire le polynôme P_3 .

11. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

Étude de la suite d'intégrales.

12. Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2 .

13. Déterminer les réels a et b , tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$

14. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .

15. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

16. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.