VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Généralités

Exercice 1 (Ceci n'est pas une v.a.d.).

On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathscr{T} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $X : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ 1 & \mapsto & 0 \\ 2 & \mapsto & 0 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 1 \end{cases}$

1. Vérifier rapidement que $\mathscr{T}$ est une tribu
2. Calculer $[X \leqslant 1]$
3. En déduire que X n'est pas une v.a.d.
4. On munit maintenant Ω de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$; Vérifier que la même fonction est une v.a.d.

Variables aléatoires

Exercice 2.
Une urne contient b billes blanches et n billes noires. On tire les billes les unes après les autres avec remise.

On note N_i : "le tirage i amène une bille noire" et B_i : "le tirage i amène une bille blanche"

1. On note X la vad représentant le rang d'apparition de la première bille noire. Écrire $[X = i]$ à l'aide d'événements N_k et B_k.
2. Calculer la loi de X
3. Calculer l'espérance de X
4. On note Y la var représentant le rang d'apparition de la deuxième bille noire.
5. Calculer $P_{X=i}(Y = k)$
6. En déduire la loi de Y (on utilisera le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{k\in ?}$

Exercice 3 ( ).
On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geqslant 4$ et $n \geqslant 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Écrire une fonction python `simulation(n,m,i)` qui simule une expérience de ce type et qui renvoie la valeur de X_i
?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. X_i et X_j sont elles indépendantes ?
5. Analyse du sujet décrire une expérience avec des dés qui nous amènerait à faire le même type de calculs.

Espérance et variance

Exercice 4.
Soit X une vad qui suit la loi donnée par

valeurs	0	1	2	34
probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi .
2. Calculer l'espérance, la variance de X ainsi que son moment d'ordre 2.

Lois usuelles

Exercice 5.
Parmi les situations suivantes qu'elles sont celles que l'on peut décrire par une vad de loi uniforme.

1. Le lancer d'un dé non truqué.
2. Le nombre de six obtenus en trois lancers successifs d'une dé.
3. Le nombre de six obtenu lors du lancer simultané de trois dés.
4. Le jour (numéro du jour dans l'année) d'anniversaire de naissance d'une personne.
5. Le jour du mois où est née une personne.

Exercice 6.
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(0.4)$.Calculer $P(X=0)$ $P(X=1)$ et $P(X>1)$

Exercice 7 (valeurs paires)**.**
.

1. (a) Soit a et b deux réels. Développer $(a+b)^{2n}+a-b)^{2n}$
   (b) En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2k}a^{2k}b^{2n-2k}$
   (c) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2n,p)$ en utilisant le résultat précédent calculer la probabilité que X soit pair.
2. (a) Soit x un réel, calculer sous forme d'une série $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$
   (b) Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $P($" Y est pair ").
   (c) Sans passer par le complémentaire
   (d) A t'on plus de chances que Y soit pair ou impair ?

Exercice 8 (D'après Grinstead et Snell)**.**
Lors de la confection de gâteaux aux pépites de chocolat, on disperse une boite de 1500 pépites dans l'appareil, on mélange et on fractionne la pâte en 500 gâteaux.
On aimerait connaître la probabilité pour un gâteau donné de contenir 0, 1, 2,...pépites.
Chaque gâteau est considéré comme une épreuve de Bernoulli pour la présence d'une pépite donnée avec $p=\frac{1}{500}$.
On note X le nombre de pépites trouvées dans un gâteau donné. C'est la répétition de 1500 épreuves de Bernoulli indépendantes. Cette v.a.d. suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(1500,\frac{1}{500}\right)$.
Comme n est grand et p petit, on admet qu'on peut "remplacer" cette loi par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=\dfrac{1500}{500}$.
Calculer la probabilité d'avoir au moins cinq pépites dans notre gâteau.

Exercice 9.
Pourquoi ne peut on pas définir de loi uniforme sur $\mathbb{N}$?

Exercice 10 (Mode d'une loi de Poisson)**.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

1. Montrer que $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ atteint un maximum quand $\lambda-1 \leqslant k \leqslant \lambda$. On pourra considérer $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$ pour déterminer le sens de variation de la suite $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$
2. Ce maximum est il unique.

Autres v.a.d.

Exercice 11.
On choisit une partie de $\llbracket 1,n\rrbracket$ au hasard et uniformément parmi tout les sous ensembles de $\llbracket 1,n\rrbracket$. On note X son cardinal. X est donc une variable aléatoire.

1. Quelle est le nombre de parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$?
2. Calculer la loi de X
3. $E(X)$ et $V(X)$?

Exercice 12.
On dispose d'une urne qui contient n billes dont une seule est noire. On vide (sans remise) l'urne jusqu'à obtenir la bille noire et on note la vad qui désigne X le nombre de tirages effectués.

1. Loi de X ?
2. $V(X)$, $E(X)$?

Exercice 13.
Les clients d'un supermarché on chacun une probabilité $p \in]0;1[$ de payer avec une carte bancaire

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients en une journée et Y le nombre de personne payant par carte bancaire en une journée. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisée $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler les propriétés de la loi de Poisson.
2. Interpréter l'énoncé pour obtenir $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i)$
3. En utilisant le théorème des probabilités totales avec le SCE $(X = k]_{k\in ?}$, en déduire la loi de Y.
4. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Exercice 14 (Le bureau de poste)**.**
Un bureau de poste comporte m guichets. On étudie ce bureau sur un jour. On suppose que pendant cette période N clients arrivent à la Poste. On suppose que N, qui est une vad, suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On note X le nombre de clients s'adressant au guichet n°1.

1. Pour $i \in ?$ et $n \in ?$ donner $P_{[N=n]}(X = i)$ (on doit reconnaître un modèle classique)
2. En utilisant les probabilités totales déduire $P(X = i)$. Quelle est la loi de X
3. Variance et espérance de X.

Exercice 15 (Une somme)**.**
On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

On pose $Z = X + Y$

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$
$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$
2. En déduire la loi de Z

Exercice 16 (Une somme)**.**
On suppose que X et Y sont indépendantes et que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

On pose $Z = X + Y$

1. Compléter la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$
$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mu^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
Simplifier ce résultat en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 17 (Un maximum)**.**
Soit n un entier non nul fixé. On choisit au hasard et indépendamment deux nombres dans $[\![1, n]\!]$.
On note X et Y les variables aléatoires désignant ces nombres et on suppose qu'il existe un espace probabilisé $\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ représentant cette expérience.
On note $M = \max(X, Y)$

1. Quelles sont les lois de X et Y.
2. Calculer la probabilité $P(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
3. Quel est le support de M ?
4. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, compléter la formule suivante.
$$[M \leqslant k] = [X \leqslant \dots] \cap [Y \leqslant \dots]$$
5. En déduire la probabilité $P(M \leqslant k$.
6. En utilisant $P(M \leqslant k) = P(M \leqslant k-1) + P(M = k)$, trouver la loi de M.

Exercice 18.

Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire deux boules successivement avec remise. On note X la v.a.d. égale au plus grand numéro obtenu et Y la v.a.d. égale au plus petit numéro obtenu.
   (a) Préciser l'univers Ω , $X(\Omega)$. Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$.
   (c) Mêmes questions pour Y.
   (d) Calculer de deux manières la fonction de répartition de X.
2. On tire de l'urne initiale deux boules simultanément. Reprendre les questions **i., ii., iii.** précédentes.
3. On tire de l'urne initiale une poignée de m boules, m étant un entier non nul et inférieur ou égal à N. Pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la v.a.d. qui prend la valeur k si la boule numéro k est dans la poignée et qui prend la valeur 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi chacune des v.a.d. X_k. et l'espérance de
   (b) Soit S la v.a.d. égale à la somme des numéros de la poignée tirée. Déterminer l'espérance de S