# Correction du devoir surveillé n° 4

## Exercice : Agro-véto

1. $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

2. (a) On a ici :

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \end{cases}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} \ , \ (a,d,g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ aI_3 + dA + gA^2 \ , \ (a,d,g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \boxed{\operatorname{vect}(I_3, A, A^2).} \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, $\mathscr{S}$ est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc, d'après notre cours, $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

La famille $(I_3, A, A^2)$ est génératrice de $\mathscr{S}$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La famille $(I_3, A, A^2)$ est bien libre.

En conclusion, $\boxed{(I_3, A, A^2) \text{ est une base de } \mathscr{S} \text{ et } \dim(\mathscr{S}) = 3.}$

3. (a) On a $M^2 = PAP^{-1} \times PAP^{-1} = PA^2P^{-1} \neq 0$ car $P$ et $P^{-1}$ sont inversibles et $A^2 \neq 0$.

De plus $M^3 = PA^2P^{-1} \times PAP^{-1} = PA^3P^{-1} = P0P^{-1} = 0$.

Donc $\boxed{M \in \mathscr{S}'.}$

(b) i. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$ et $M^3 = 0$.

Donc $\boxed{M \in \mathscr{S}'.}$

ii. $M^2$ étant la matrice de $f^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a par exemple $f^2(1,0,0) = (2,0,2) \neq 0$.

$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{x} = (1,0,0) \text{ vérifie bien que } f^2(\overrightarrow{x}) \neq 0.}$

iii. Avec le choix fait dans la question précédente on a : $\mathscr{B} = ((1,0,0), (-1,1,0), (2,0,2))$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$a(1,0,0) + b(-1,1,0) + c(2,0,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre et $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

iv. Comme

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}) &= 0\overrightarrow{x} + 1f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f(\overrightarrow{x})) &= 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 1f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f^2(\overrightarrow{x})) &= 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.}$

v. $A$ et $M$ sont deux matrices associées au même endomorphisme $f$ mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, $\boxed{\text{il existe } P \text{ matrice inversible telle que } M = PAP^{-1}.}$

(c) i. $M^2$ étant la matrice de $f^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $M^2$ étant non nulle, $f^2$ n'est pas l'application nulle. $\boxed{\text{Donc il existe nécessairement } \overrightarrow{x} \text{ tel que } f^2(\overrightarrow{x}) \neq 0.}$

ii. On cherche tous les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) + cf^2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \qquad (\star)$$

En appliquant la fonction $f$ aux deux membres de l'égalité $(\star)$ on obtient :

$$\begin{aligned} & af(\overrightarrow{x}) + bf^2(\overrightarrow{x}) + cf^3(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ \Rightarrow\ & af(\overrightarrow{x}) + bf^2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ car } M^3 = 0 \text{ donc } f^3 = 0 \end{aligned}$$

On applique à nouveau la fonction $f$ et on obtient alors $af^2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ pour les mêmes raisons.
On a donc

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) + cf^2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} &\Longleftrightarrow \begin{cases} a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) + cf^2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \\ af(\overrightarrow{x}) + bf^2(\overrightarrow{x}) = 0 \\ af^2(\overrightarrow{x}) = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre et $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

iii. Comme

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}) &= 0\overrightarrow{x} + 1f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f(\overrightarrow{x})) &= 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 1f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f^2(\overrightarrow{x})) &= 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$

$A$ et $M$ sont deux matrices associées au même endomorphisme $f$ mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, $\boxed{\text{il existe } P \text{ matrice inversible telle que } M = PAP^{-1}.}$

(d) D'après les questions 3.a) et 3.c), $\boxed{M \in \mathscr{S}' \text{ si, et seulement si, } M \text{ est semblable à } A.}$

# Problème 1 : Agro-véto

## Partie A : Préliminaires

1. $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}.}$

2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   — Comme $\dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est bien vérifiée.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   On a alors :
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

   Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

3. Comme $X$ est une variable aléatoire réelle finie, elle admet un moment d'ordre 2 et une variance. De plus :
   $$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   Donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens :
   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \boxed{\frac{n^2-1}{12}}.$$

## Partie B : Étude d'un cas particulier

4. Deux possibilités s'offrent à nous après une expérience : soit on a tiré une boule blanche et on a donc ajouté une boule blanche supplémentaire dans l'urne, et dans ce cas $X_1 = 2$, soit on a tiré une boule noire et on a donc ajouté une boule noire supplémentaire dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 1$.

   Donc $\boxed{X_1(\Omega) = \{1,2\} \text{ et } P(X_1=1) = P(X_1=2) = \frac{1}{2}. \text{ (}X_1\text{ suit la loi uniforme sur } [\![1;2]\!]\text{.)}}$

5. On a $X_2(\Omega) = [\![1;3]\!]$. De plus :
   $$\begin{aligned}
   P(X_2=1) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}) = P(B_1)P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) && \text{proba composées}\\
   &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}, && \text{description de l'expérience}\\
   P(X_2=2) &= P((B_1\cap\overline{B_2})\cup(\overline{B_1}\cap B_2))\\
   &= P(B_1\cap\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}\cap B_2) && \text{union disjointe}\\
   &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} && \text{proba composées}\\
   &= \frac{1}{3}\\
   P(X_2=3) &= P(B_1\cap B_2) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}
   \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{X_2 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1;3]\!].}$

6. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![1;n+1]\!]$ », est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   — D'après les questions précédentes, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Avant la $n+1^{\text{ème}}$ expérience, l'urne contient au plus $n+1$ boules blanches et au moins une boule blanche.
   Donc après la $n+1^{\text{ème}}$ expérience il y a entre 1 et $n+2$ boules blanches. $X_{n+1}(\Omega) = [\![1;n+2]\!]$.

Pour tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = k) \\
&= 0 + P(X_n = k-1) P_{[X_n = k-1]}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k) P_{[X_n = k]}(X_{n+1} = k) + 0 \\
&\text{écriture qui n'a du sens que pour } k \neq 1 \text{ et } k \neq n+2 \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on a $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) P_{[X_n = 1]}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

Pour $k = n+2$, on a

$$P(X_{n+1} = n+2) = P(X_n = n+1) P_{[X_n = n+1]}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc $X_{n+1}$ suit bien une loi uniforme sur $[\![1; n+2]\!]$.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, X_n \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1; n+1]\!].}$

7. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n = i]}(B_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+2} && i \text{ boules blanches et } n+2 \text{ au total} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

## Partie C : Retour au cas général

8. $\boxed{P(B_1) = \dfrac{N_1}{N}}$ et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$ :

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_1) P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(B_2) \\
&= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1 + 1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1} \\
&= \frac{N_1(N_1 + 1 + N_2)}{N(N+1)} = \boxed{\frac{N_1}{N}.}
\end{aligned}$$

9. (a) D'après la description des expériences successives, on a $X_{n-1}(\Omega) = [\![N_1; N_1 + n - 1]\!]$.
Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{k \in [\![N_1; N_1+n-1]\!]}$ :

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) P_{[X_{n-1} = k]}(B_n) \\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N+n-1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k P(X_{n-1} = k) = (N+n-1) P(B_n).}$

(b) Avant le $(n+1)$ème tirage il y a $N+n$ boules au total dans l'urne.

De plus, sachant que $[X_{n-1}=k]\cap B_n$ est réalisé, avant le $(n+1)$ème tirage il y a $k+1$ boules blanches (il y en avait $k$ à l'issue du $(n-1)$ème tirage et le $n$ème tirage nous en a rajouté une).

Donc $\boxed{P_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1})=\dfrac{k+1}{N+n}}$

De même, $\boxed{P_{[X_{n-1}=k]\cap \overline{B_n}}(B_{n+1})=\dfrac{k}{N+n}.}$

(c) La famille d'événements $([X_{n-1}=k]\cap B_n, [X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})_{k\in[\![N_1;N_1+n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\Big(P([X_{n-1}=k]\cap B_n)P_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1})+P([X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})P_{[X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n}}(B_{n+1})\Big)\\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n)\frac{k+1}{N+n}+P([X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})\frac{k}{N+n}\right)\\
&= \frac{1}{N+n}\left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n)+k\underbrace{\left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n)+P([X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})\right)}_{P(X_{n-1}=k)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{N+n}\left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n)+kP(X_{n-1}=k)\right)\right)\\
&= \frac{1}{N+n}\left(\underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}P([X_{n-1}=k]\cap B_n)}_{\text{formule des probas totales}}+\underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}kP(X_{n-1}=k)}_{\text{question 2.a)}}\right)\\
&= \frac{1}{N+n}\left(P(B_n)+(N+n-1)P(B_n)\right)\\
&= P(B_n).
\end{aligned}$$

10. D'après les questions 8. et 9.c), $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ P(B_n)=\dfrac{N_1}{N}}$ et d'après la question 9.a), $\boxed{E(X_n)=(N+n)P(B_{n+1})=\dfrac{N_1(N+n)}{N}.}$

# Problème 2 : G2E

## Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

1. (a) Pour tout réel $x$, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x+1}=0}$ d'après la règle des croissances comparées.

Par définition d'une limite, on a :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists A>0,\ \text{tel que}\quad t\geqslant A\Longrightarrow|\mathrm{e}^{-t}t^{x+1}-0|\leqslant\varepsilon.$$

On choisit d'appliquer cette définition pour $\varepsilon=1$, ce qui nous donne l'existence d'un réel $T\geqslant1$ (*dans la définition on a* $>0$ *mais on peut faire le choix d'imposer de prendre un réel* $\geqslant1$) tel que :

$$\forall t\in[1;+\infty[,\qquad t\geqslant T\Longrightarrow \mathrm{e}^{-t}\underbrace{t^{x+1}}_{=t^2\times t^{x-1}}\leqslant1\Longrightarrow\boxed{\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\leqslant\frac{1}{t^2}}.$$

(b) Quel que soit le réel $x$, la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $[1;+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est impropre uniquement en $+\infty$.

On a vu que, pour tout $t \geqslant T$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente :

$$\forall \alpha \geqslant 1, \quad \int_1^{\alpha} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha} + 1.$$

Or, $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 \in \mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

Par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, on peut en déduire que

$\boxed{\text{pour tout réel } x, \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

2. (a) Si $x \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0;1]$. Le problème de convergence se pose donc en 0.

Soit $A \in ]0;1]$. Si $x \neq 0$, $\displaystyle\int_A^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_A^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}A^x$.

Or, si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{A \to 0} A^x = 0$ et si $x < 0$, $\displaystyle\lim_{A \to 0^+} A^x = +\infty$.

Donc si $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{x}$, et si $x < 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est divergente.

Pour le cas $x = 0$, on a $\displaystyle\int_A^1 \frac{1}{t} = -\ln(A)$ et $\displaystyle\lim_{A \to 0^+} -\ln(A) = +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^1 t^{-1}\mathrm{d}t$ est divergente.

En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0 \text{ et pour } x > 0, \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.}$

(b) Méthode 1 : par équivalence

On sait que $\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} 1$ donc $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$.

Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on sait donc que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or on vient de montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0.}$

Méthode 2 : par inégalités

Pour tout $t \in ]0;1]$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$, donc :

$$\forall t \in ]0;1], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant t^{x-1}.$$

Si $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente donc par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

Si $x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ est divergente donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-1} t^{x-1}\mathrm{d}t$ est divergente et donc, par critère de minoration pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$ est divergente.

En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0.}$

3. D'après les questions 1. et 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathbb{R}^{+*}.}$

## Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

4. (a) Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, pour tout $t \in ]0; +\infty[$, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \geqslant 0$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ n'est pas la fonction nulle sur $]0; +\infty[$.

Donc, par propriété de stricte positivité de l'intégrale, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x) > 0.}$

(b) Soit $x > 0$ fixé. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. On pose, pour $t > 0$ :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^x & u'(t) = xt^{x-1} \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} & v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ (croissances comparées).

Par théorème d'intégration par parties généralisé, comme $\Gamma(x+1)$ est convergente, on a $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ qui est convergente et

$$\Gamma(x+1) = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On a bien, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

(c) $\boxed{\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1.}$ (Intégrale de référence)

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $\Gamma(n) = (n-1)!$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, d'une part $(n-1)! = 0! = 1$ et d'autre part $\Gamma(1) = 1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$

5. (a) On a montré que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ et on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$ car $\Gamma$ est continue en 1.

Donc par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty}$.

Par caractérisation séquentielle de la limite, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} \Gamma(n)$.

Or $\Gamma(n) = (n-1)!$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.}$

(b) Par caractérisation séquentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Gamma(n)}{n}$.

Or $\dfrac{\Gamma(n)}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n} = \dfrac{n!}{n^2}$. Donc, d'après la règles des croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty.}$

6. (a) D'après notre cours, $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.}$

Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

On a donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$

(b) Par définition, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

On pose alors $u = \sqrt{2t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On a de plus $\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $u$ varie de 0 à $+\infty$.

Grâce au théorème de changement de variable généralisé, comme on sait que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est convergente, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{2}\mathrm{d}u = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

On a donc $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$

(c) On remarque que :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&\vdots\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\ldots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-3}{2}\times\ldots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\times\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\times 3\times 2\times 1}{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

*Cette démonstration avec les pointillés n'est pas très rigoureuse mais vu la longueur de l'épreuve il est possible qu'aux concours ce calcul soit suffisant. Voici la démonstration rigoureuse par récurrence :*

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $\frac{0!}{2^0 0!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

D'après la question 4.b),

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2n+1}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.}$

## Bonus : Des calculs

7. La fonction $f_{a,\lambda}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
   On considère le changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant sur $]0;+\infty[$ : $t = \lambda x$. On a alors $\mathrm{d}t = \lambda\mathrm{d}x$ et $t$ varie de 0 à $+\infty$.
   D'après le théorème de changement de variable généralisé, sous réserve de convergence, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{a-1}\lambda\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t = 1.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x = 1.}$

8. On reprend le même changement de variable que dans la question précédente. Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^a\frac{\mathrm{d}t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\Gamma(a)}\Gamma(a+1) = \frac{a}{\lambda}.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{\lambda}.}$

9. Pour $x < 0$, on a bien $F'_{a,\lambda}(x) = f_{a,\lambda}(x)$.
Pour $x > 0$ :

$$\begin{aligned}
F'_{a,\lambda}(x) &= -\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}(-\lambda x + k)\lambda(\lambda x)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}(\lambda x)^k + \sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1}\right) \\
&= -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}(\lambda x)^k + \sum_{k=0}^{a-2}\frac{1}{k!}(\lambda x)^{k}\right) \\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} \times \frac{(\lambda x)^{a-1}}{(a-1)!} \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^{a-1} = f_{a,\lambda}(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{F_{a,\lambda} \text{ est bien une primitive de } f_{a,\lambda} \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$