Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4

Samedi 17 janvier 2026

Durée de l'épreuve : 3h

Le devoir comporte un exercice et deux problèmes tous indépendants.
La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés ***à l'aide d'une règle****.*

Exercice

Rappel : on rappelle que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

En particulier, $f^2 = f \circ f$.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. On considère $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Démontrer que $\mathscr{S} = \text{vect}(I_3, A, A^2)$.
   Indication : on pourra poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *et résoudre l'équation* $AM = MA$.
   (b) En déduire que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
3. On considère $\mathscr{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Soit $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathscr{S}'$.
   (b) Dans cette question, on pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Vérifier que $M \in \mathscr{S}'$.
   On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\overrightarrow{x})$ soit non nul.
      iii. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), f^2(\overrightarrow{x}))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
      v. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$
   (c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela, on considère une matrice M quelconque de $\mathscr{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
      i. Prouver qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\overrightarrow{x})$ soit non nul.
      ii. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), f^2(\overrightarrow{x}))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iii. En déduire qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
   (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathscr{S}'$.

Problème 1

Partie A : Préliminaires

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \cdots, n\} = [\![1, n]\!]$.

1. Donner, sans justifications, l'espérance de X.
2. **Prouver par récurrence** que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En déduire la variance de X (on attend un calcul complet).

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.

On pose $N = N_1 + N_2$.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience.

Pour tout k non nul, on note B_k l'événement "la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche".

Partie B : Étude d'un cas particulier

On suppose ici que $N_1 = 1$ et $N_2 = 1$.

4. Déterminer la loi de X_1.
5. Déterminer la loi de X_2.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
   On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $([X_n = k])_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
   On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales.

Partie C : Retour au cas général

ATTENTION : on ne suppose plus dans cette partie que $N_1 = 1$ et $N_2 = 1$! On ne pourra donc pas utiliser les résultats des questions 4. à 7.

8. Déterminer la probabilité des événements B_1 et B_2.
9. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N + n - 1)P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![N_1, N_1 + n - 1]\!]$. Déterminer la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap [X_{n-1} = k]$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap [X_{n-1} = k]$
   (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$. *On pourra utiliser une formule des probabilités totales avec un système complet d'événements bien choisi.*
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n.

Problème 2

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. On rappelle que $n!$ désigne la factorielle de n.
Dans la partie A, on détermine l'ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale. Dans la partie B, on établit quelques propriétés remarquables de cette fonction et on en calcule des valeurs.

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $T \in [1; +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad t \geqslant T \Rightarrow \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

   (b) Pour quelles valeurs de x , $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

2. (a) Démontrer que $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.
   (b) En déduire que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de Γ.

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

4. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0.$$

   (b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

   (c) Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
5. On admet que Γ est continue sur $]0;+\infty[$ et que Γ admet une limite en 0^+ et en $+\infty$.
   (a) À l'aide des questions 4.b) et 4.c), déterminer les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) Déterminer également $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$.
6. (a) Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

   (c) En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

Bonus : Des calculs

Les réponses à ces questions ne seront corrigées que ce si le reste du sujet a été correctement traité.
Soit $(a,\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}_+^{*3}$ et on considère la fonction $f_{a,\lambda}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^{a-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.
8. Montrer que $\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.
9. On suppose dans cette dernière question que a est un entier naturel non nul et on note t un réel strictement positif.
   Démontrer que la fonction ci-dessous est une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k \mathrm{e}^{-\lambda x}}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$