VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Introduction

Exercice 1.
À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0,30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ? Qu'il l'attende plus de dix minutes ?

Exercice 2.
Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer c.
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Définitions

Exercice 3.
Déterminer si c'est possible la valeur de la constante a pour que les fonctions suivantes soient des densités. Dans ce cas là calculer leur fonction de répartition.

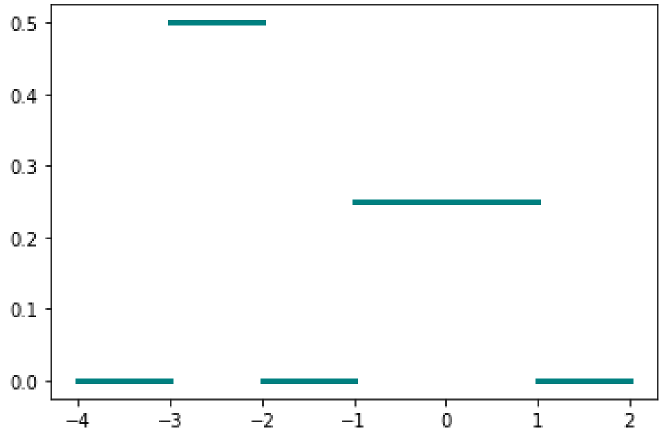
Dans les cas ou une valeur a convient, calculer les probabilités $P(X \leqslant 0)$ $P(X \geqslant 0)$ et $P(0 \leqslant X \leqslant 1$

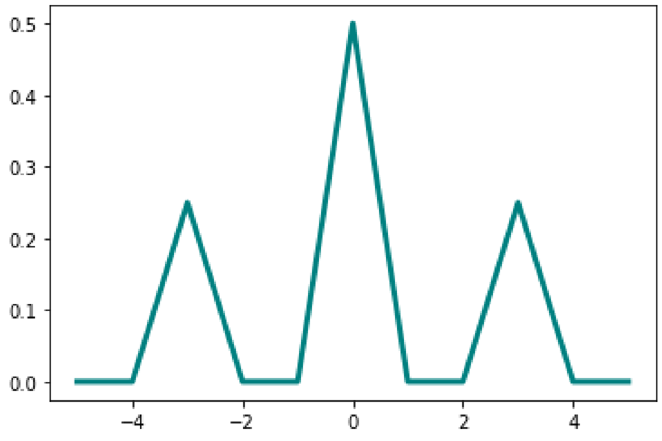
1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ at\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ at^2\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a\mathrm{e}^{-2t}(1-\mathrm{e}^{-2t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a\mathrm{e}^{-t}\ln\left(1+\mathrm{e}^{t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ On pourra poser $u(t) = \mathrm{e}^t$ et faire un changement de variable.
6. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4.
Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition. Si oui calculer une densité associée.

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

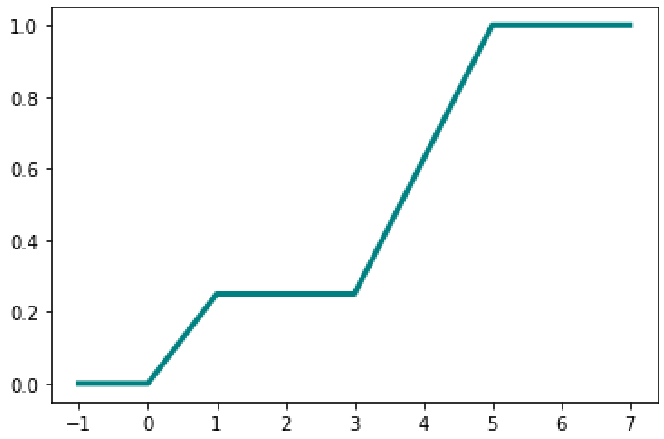
Exercice 5.
Voici la courbe représentative de deux fonctions, pour chacune des deux fonctions





1. vérifier "géométriquement" que l'intégrale $\int_R f$ vaut 1.
2. Donner l'allure de la fonction de répartition associée.
3. Soit X qui suit une loi définie par cette densité. De $P(X \geqslant 0)$ et $P(X \leqslant 0)$ laquelle est la plus grande
4. Quel est le signe de l'espérance ?

Exercice 6.
Donner l'allure d'une densité associée à la fonction de répartition représentée ci dessous



Transfert, opérations,

Exercice 7 (valeur absolue)**.**
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]-1;1[)$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

1. Écrire une fonction python `exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `rd.random`.
2. Montrer que le support de Y est $[0;1[$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $F_Y(x) = 0$.
4. Soit $x > 0$ montrer que
$$[Y \leqslant x] = [-x \leqslant X \leqslant x]$$
5. En déduire $F_Y(x)$ quand $x > 0$.
6. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.

Exercice 8.
(⚠ valeur absolue, non symétrique) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]-1;2[)$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

1. Écrire une fonction python `fexo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `rd.random`
2. Calculer le support de Y.
3. Calculer la fonction de répartition de Y. On distinguera 4 cas $x < 0$, $0 \leqslant x < 1$, $1 \leqslant x < 2$ et $x \geqslant 2$
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.

Exercice 9 (⚠ partie entière (classique))**.**
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; n+1[$ où n est un entier naturel non nul. On note $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière. On admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Écrire une fonction python `exo(n)` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `rd.random`
2. Rappeler la définition de la partie entière.
3. Donner le support de Y.
4. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$
$$[Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$$
5. En utilisant la fonction de répartition de X en déduire $P(Y = k)$.

Exercice 10.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet dans les questions suivantes que les objets manipulés sont bien des variables aléatoires réelles.

1. On pose $Y = \sqrt{X}$. Quel est le support de Y.
2. Comment simuler cette variable aléatoire en python.
3. Calculer la fonction de répartition de Y. On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.
5. On pose $Z = X^2$, reprendre les questions précédentes avec Z.

Exercice 11 (⚠ Cas général)**.**
Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est F.

On suppose que F est strictement croissante et on note $Y = F(X)$ on admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble que l'on déterminera. On note F^{-1} la bijection réciproque de F.
2. On note G la fonction de répartition de Y. Montrer que pour $x<0$ $G(x)=0$ et que pour $x>1$ on a $G(x)=1$.
3. Montrer que pour $x\in[0;1]$ on a $G(x)=x$.
4. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 12 (Transfert affine)**.**
Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f. On pose $Y=3X+4$.

Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y

Moments

Exercice 13 (Parité et espérance)**.**

Remarque : Vous pouvez utiliser les résultats de cet exercice en faisant bien attention à démontrer la convergence.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.. On suppose que f est paire.

1. Redémontrer [1] que si $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. (changement de variable) et a même valeur
2. En déduire que si $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que dans ce cas là
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Dans la suite on suppose avoir montré que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
3. Montrer que si $\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente alors X admet une espérance et que dans ce cas là $E(X)=0$.
4. Que peut on dire pour la variance? pour les autres moments (sans démonstration)

Exercice 14.
Vous pouvez utiliser l'exercice 13 On pose

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x^2} & \text{si } |x|\geqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où α est une constante réelle positive

1. Montrer que f est paire et tracer rapidement son graphe.
2. Trouvez α pour que f soit une densité.
On note dans la suite X une variable aléatoire dont f est une densité.
3. X admet elle une espérance? Si oui la calculer
4. Calculer F_X la fonction de répartition de X. Cette fonction est elle paire? Est elle impaire
5. Recommencer avec $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^4} & \text{si } |x|\geqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 15.
Après avoir vérifié que les fonctions suivantes définissent des densités, calculer l'espérance et la variance associée si elles existent.

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2) & \text{si } x\in[-1;1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}4\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x\geqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 16.
Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathscr{U}([a;b])$

Exercice 17.
Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant normale de $\mathscr{N}(0,\ 1)$.

Exercice 18.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant 1\\ \dfrac{2}{t^3} & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que f admet une espérance et calculer cette espérance.
3. Montrer que f n'admet pas de variance

Exercices complets

Exercice 19.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } -\ln 2\leq x\leq \ln 2\\ f(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. C'est un résultat du cours que l'on peut utiliser directement mais qu'il faut savoir démontrer

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé (unité 5cm).
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
   (c) On pose $Y = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 20.
Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$$

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0;1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

   (c) En déduire une densité f de Z.
   (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible?

Exercice 21.
Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. En utilisant les propriétés de la loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ puis donner sa valeur.
2. Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xh(x)dx$ puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Couple et suite de vad

Exercice 22.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendante suivant la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $I = \inf(X,Y)$ le minimum et $S = \sup(X,Y)$ le maximum des deux lois.

1. Écrire une fonction python `def maxexp(n,l)` qui revoit un tableau ou chaque case est la simulation d'une expérience décrite précédemment. n désigne la longueur du tableau et l le paramètre de la loi exponentielle.
2. Calculer une densité de S.
3. Calculer la fonction de répartition de I et reconnaître la loi de I.
4. Montrer que $X + Y = I + S$ et calculer l'espérance de S.
5. S et I sont elles indépendantes.

Sommes

Exercice 23 (Loi uniforme/exponentielle)**.**
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec X et Y indépendantes.

1. Rappeler une densité f de X et g de Y.
2. Rappeler la formule donnant $f \star g$.
3. Sur un même graphe tracer les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(x-t)$, on choisira plusieurs valeurs pour x pour visualiser tous les cas possibles.
4. Calculer une densité de $X+Y$ et la représenter graphiquement.

Exercice 24 (Loi uniforme)**.**
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ avec X et Y indépendantes.

1. Rappeler une densité f commune à X et Y.
2. Rappeler la formule donnant $f \star f$.
3. Sur un même graphe tracer les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(x-t)$, on choisira plusieurs valeurs pour x pour visualiser tous les cas possibles.
4. Calculer une densité de $X+Y$ et la représenter graphiquement.
5. Calculer la fonction de répartition de $X+Y$

Exercice 25 (Loi uniforme/exponentielle)**.**
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec X et Y indépendantes.

1. Rappeler une densité f de X et g de Y.
2. Rappeler la formule donnant $f \star g$.
3. Sur un même graphe tracer les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(x-t)$, on choisira plusieurs valeurs pour x pour visualiser tous les cas possibles.
4. Calculer une densité de $X+Y$ et la représenter graphiquement.

Exercice 26 (Loi uniforme)**.**
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([c;d])$ avec X et Y indépendantes. On suppose que $b - a < d - c$ (et $a < b$ et $c < d$)

1. Rappeler une densité f de X et g de Y.
2. Rappeler la formule donnant $f \star g$.

3. Sur un même graphe tracer les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(x-t)$, on choisira plusieurs valeurs pour x pour visualiser tous les cas possibles.
4. Calculer une densité de $X+Y$ et la représenter graphiquement. Pour le calcul on pourra se contenter d'un calcul d'aire avec les formules de géométrie du rectangle.
5. Calculer la fonction de répartition de $X+Y$

Autres

Exercice 27.
Le participant d'un jeu lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X_i.
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.
5. Quelle est la probabilité de l'événement G ="le joueur gagne la partie" ?

Lois usuelles

Exercice 28 (Graphe d'une courbe gaussienne.)**.**

1. Tracer le tableau de variation de la densité $f_{m,\sigma}$ d'une variable aléatoire loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On justifiera les limites, et on étudiera la concavité/convexité ainsi qu les points d'inflexion.
2. En quel point $f_{m,\sigma}$ atteint elle son maximum ? (C'est le mode)

Exercice 29.
Soit $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,2)$ et soit $V \hookrightarrow \mathcal{N}(1,3)$ indépendantes , trouver la loi de $2U+3V$

Exercice 30 (Médiane d'une variable aléatoire suivant une loi normale)**.**
On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\Phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

1. Rappeler pourquoi $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Pourquoi l'equation $\Phi(x) = \frac{1}{2}$ admet 0 comme unique solution ?
2. Montrer que pour x réel $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$
3. Touvrer la médiane de X, c'est à dire le réel tel que $P(X \leqslant \mu) = \frac{1}{2}$

Exercice 31.

1. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   Montrer que $Y = \mu X$ suit une loi classique dont on donnera le paramètre.
2. Soit $\lambda > 0$ montrer que
$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Exercice 32.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et $\alpha > 0$, β deux réels. Montrer que $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi usuelle.

Exercice 33.
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X.
Trouver (sans calculs) la loi de X^*.

Exercice 34.
Soit $m \in \mathbb{R}$ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X.
Trouver (sans calculs) la loi de X^*

Exercice 35.

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-x^2/2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
   La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.
2.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Calculer la médiane de X c'est-à-dire le réel μ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant \mu) = \frac{1}{2}$.
3. On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o, et le déterminer.
4.
   (a) En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X a une espérance et montrer que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
   (b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X.

Exercice 36 (Durée de vie/ loi exponentielle)**.**
Les ampoules électriques d'un tunnel routier sont allumées 24 heures sur 24 et la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle d'espérance 10000 heures. Il y a 100 ampoules dans le tunnel et à l'instant t = 0, on installe des ampoules neuves.

1. Quel est la demie-vie d'une ampoule, c'est à dire la durée τ au bout de laquelle une ampoule donnée à une probabilité $\frac{1}{2}$ de ne plus fonctionner
2. Au bout de combien de temps, la probabilité qu'au moins une ampoule soit en panne dépasse-t-elle 95% ? On note par la suite t_0 ce temps.
3. On note $Y_i(t_0)$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ampoule i est encore en fonctionnement à l'instant t_0 et 0 sinon. Quel est la loi suivie par $Y_i(t_0)$?
4. On note $N(t_0)$ le nombre d'ampoule en fonctionnement à l'instant t_0. Quelle est la loi suivie par $N(t_0)$?
5. On envoie un technicien à l'instant t_0 pour changer les ampoules défectueuses
   (a) Quel est le nombre moyen d'ampoule qu'il va changer? On ne demande pas une valeur numérique
   (b) Quelle est la probabilité qu'il change deux ou plus ampoules? On ne demande pas une valeur numérique

Exercice 37 (Systèmes en parallèle ou en série)**.**
On note X_1 la durée de fonctionnement d'une machine M1 et X_2 la durée de fonctionnement d'une machine M2. on suppose que

$$X_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda_1) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda_2)$$

On suppose de plus que ces deux variables aléatoires sont indépendantes

1. On suppose qu'une usine à besoin successivement des deux machines pour fabriquer un objet. On note X la durée pendant laquelle l'usine peut fonctionner avant une panne.
   (a) Pour t réel exprimer $P(X > t)$ en fonction de $P(X_1 > t)$ et $P(X_2 > t)$
   (b) En déduire la loi de X.
2. On suppose qu'une usine utilise les deux machines indépendamment pour fabriquer en parallèle un objet. On note Y la durée pendant laquelle l'usine peut fonctionner avent une panne.
   (a) Pour t réel exprimer $P(Y \leqslant t)$ en fonction de $P(X_1 \leqslant t)$ et $P(X_2 \leqslant t)$
   (b) En déduire la loi de Y.

.

Exercice 38 (Concentration des lois normales)**.**
On pourra trouver des tables statistiques sur http://fabricelarribe.uqam.ca/Enseignement/Tables/

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   (a) Donner une valeur approchée de $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$
   (b) Donner une valeur approchée de $P(-2 \leqslant X \leqslant 2)$
   (c) Comment faut il choisir le réel t pour que la probabilité que X s'éloigne de plus de t de son espérance soit inférieur à 2%
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   (a) Donner une valeur approchée de $P(m - \sigma \leqslant X \leqslant m + \sigma)$
   (b) Donner une valeur approchée de $P(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma)$
   (c) Comment faut il choisir le réel t pour que la probabilité que X s'éloigne de plus de $t\sigma$ de son espérance soit plus petite que 2%

Exercice 39 (⛰⛰ Somme de variables aléatoires suivant des lois normales)**.**
Le but de cet exercice est de prouver le résultat du cours

1. Dans cette question X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on suppose de plus que X et Y sont indépendantes
   (a) On note f une densité de X et g une densité de Y. Donner l'expression de ces deux fonctions.
   (b) On rappelle que la densité de $X + Y$ est donnée par l'intégrale convergente
   $$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) \, \mathrm{d}t$$
   Montrer que pour tout réels x, et t
   $$\frac{t^2}{\sigma^2} + (x - t)^2 = \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 + \frac{x^2}{1 + \sigma^2}$$
   (c) En utilisant la formule pour $f \star g$ et le changement de variable $u = \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2}} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)$ montrer que pour x réel
   $$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 + \sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{x^2}{1 + \sigma^2} \right) \right) \mathrm{d}u$$
   (d) En déduire que $X + Y$ suit une loi normale dont on précisera l' espérance et la variance
2. On revient au cas général X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, on suppose de plus que X et Y sont indépendantes.
   (a) On utilisant les résultats précédents et les résultats du cours donner la loi de $\frac{X - \mu_1 + Y - \mu_2}{\sigma_1}$
   (b) En déduire la loi de $X + Y$.