DM 14

Bio Spé

à rendre le lundi 2 février 2026

Exercice Oral

Question de cours

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice avec préparation

Soient $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0;1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.
   (c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geqslant 2$.

2. On note F_n la fonction de répartition de Y_n.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
   En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.
3. (a) Montrer que pour tout réel u de $[0;1]$, on a : $(1-u)^n \geqslant 1 - nu$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\mathrm{d}x$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.
4. (a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\int_0^A x f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^A (1 - F_n(x))\mathrm{d}x - A(1 - F_n(A)).$$
   (b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :
$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\mathrm{d}x.$$
5. À l'aide du changement de variable $t = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, montrer que :
$$E(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\mathrm{d}t,$$
   et en déduire finalement que : $E(Y_n) = S_n$.