DM 13

Bio Spé

à rendre le lundi 26 janvier 2026

Exercice Oral

Rappel : algorithme de dichotomie. On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a;b]$ en un point que l'on note α.
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$\text{si } g(a_k)\, g(c_k) \leqslant 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$
$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers α.

Énoncé Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que $\dfrac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que Φ est une densité de probabilité.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)dt$ converge absolument.
6. Montrer que $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \dfrac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Facultatif exercice type ENS

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est à **variation lente** si :

$$\text{pour tout } c > 0 \text{ on a } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

Les trois parties qui suivent sont indépendantes entre elles.

Première partie.

1. Montrer que la fonction ln est à variation lente.
2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$.
Montrer que f est à variation lente.
3. On suppose que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. La fonction f est-elle toujours à variation lente ?

Deuxième partie.

On fixe une constante $a > 0$ et une fonction continue $h : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\text{pour tout } x \geqslant 2, \quad f(x) = a\exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right). \tag{1}$$

4. Montrer que $h(x) = \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ pour tout $x \geqslant 2$.
5. **Un exemple**
   (a) En s'aidant de la question (4), donner une écriture de $\ln(x)$ sous la forme
   $$\ln(x) = a\exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) \quad \text{pour } x \geqslant 2 \tag{2}$$
   avec $a > 0$ et $h : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

   (b) Pour quelles valeurs de $x < 2$ peut-on prolonger l'égalité (2) de la question précédente ? Justifier votre réponse.
6. On revient au cas d'une fonction f générale de la forme (1) donnée au début de cette partie.
   (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \leqslant Cx^\epsilon$ pour tout $x \geqslant 2$. *Indication. On pourra fixer $M > 0$ tel que $|h(u)| \leqslant \epsilon$ pour tout $x \geqslant M$, et couper l'intégrale en deux.*

(b) Montrer que pour tout $c > 0$, $\displaystyle\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \to 0$ lorsque $x \to \infty$.

(c) Montrer que f est à variation lente.

Troisième partie.

Soit X une variable aléatoire réelle à support dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que sa fonction de répartition est continue. On pose $\bar{F}(u) = \mathbb{P}(X \geqslant u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

7. Justifier que $\bar{F}$ est continue.
8. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un nombre réel $a_n \geqslant 0$ tel que $\bar{F}(a_n) = \dfrac{1}{n}$.

   (b) On suppose, uniquement dans cette question, que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la valeur de a_n.

   (c) On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}[X] \geqslant \dfrac{a_n}{n}$.

   (d) On suppose que $\dfrac{a_n}{n} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Afin de modéliser des phénomènes aléatoires extrêmes, on suppose à présent qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une fonction à variation lente g tels que $\bar{F}(u) = \dfrac{g(u)}{u^\alpha}$ pour tout $u > 0$. On suppose également que $a_n \to +\infty$.

9. Montrer que pour tout $u > 0, \mathbb{P}(X \geqslant u a_n) \sim \dfrac{1}{u^\alpha n}$ lorsque $n \to +\infty$.
10. Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Déterminer, pour $u > 0$ fixé, la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{a_n} \geqslant u\right)$$