DM 13

Bio Spé

Réponses

Exercice Oral

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et après calculs
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$
f est donc strictement décroissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
De plus
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$
ce qui démontre que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{1}{x}\left(x\ln(x)+1\right) - \ln(1+x)$$
en utilisant le théorème des croissances comparées on démontre que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$
Comme $1 \in \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[$, on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou le théorème de la bijection monotone).
$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=1 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}_+^*.}$$

2.
```python
import math as m
def f(x):
    return m.log(x)-m.log(x+1)+1/x

print("f(1/3)=",f(1/3))
print("f(1/2)=",f(1/2))
>>>f(1/3)= 1.6137056388801094
>>>f(1/2)= 0.9013877113318904
```
On constate que
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 1 \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$$
C'est-à-dire
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(\alpha) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$$
Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$$\boxed{\frac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}.}$$

3.
```python
def dicho(a,b,f,y,n):
    '''renvoie une solution approchée
     de y=f(x) sur l'intervalle [a,b]'''
    eps=10**-n
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if (f(a)-y)*(f(c)-y)<0:
            b=c
        else:
            a=c
    return a,b

print(dicho(1/3, 1/2, f,1, 10))
>>>(0.46594127236555016, 0.4659412724431604)
```

4. **Positivité** Comme $\alpha > 0$, la fonction Φ est à valeurs positives.
Régularité La fonction Φ est continue sauf éventuellement en α.
Intégrale En utilisant les calculs de la première question
$$\Phi = -f'$$
Soit x plus grand que α,
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{\alpha}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t && \text{définition de } \Phi \text{ intégrale sur un segment}\\ &= -f(x) + f(\alpha)\\ &= -f(x) + 1 && \text{définition de } \alpha\end{aligned}$$
Comme $\lim_{+\infty} f = 0$
$$\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut 1.}$$
$$\boxed{\Phi \text{ est une densité de probabilité.}}$$

5. On remarque que sous réserve de convergence absolue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrande étant alors positive, la convergence absolue se confond avec la convergence et l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

$$t\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

On montre facilement par le calcul que l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, en utilisant le critère de comparaison sur les intégrales de fonctions positives

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument.}}$$

6. Pour t réel plus grand que α

$$\begin{aligned} t\Phi(t) - \frac{1}{t^2} &= \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{t-(t+1)}{t^2(t+1)} \\ &= -\frac{1}{t^2(t+1)} \\ &= f'(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \text{ dans } [\alpha; +\infty[,\ t\Phi(t) - \frac{1}{t^2} = f'(t).}$$

7. **Méthode 1** Soit $A > \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{A} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} \\ &= \int_{\alpha}^{A} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= [\ln(t) - \ln(t+1)]_{\alpha}^{A} \\ &= \ln(A) - \ln(A+1) - \ln(\alpha) + \ln(\alpha+1) \\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{A}\right) - \ln(\alpha) + \ln(\alpha+1) \\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{A}\right) + \frac{1}{\alpha} - 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en remarquant que $\ln(\alpha)-\ln(\alpha+1)+\dfrac{1}{\alpha} = 1$

Un calcul de limite immédiat montre que

$$\lim_{A\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{A}\right) = 0$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} - 1$$

Méthode 2 Soit $A > \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{A} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{A} \left(f'(t) + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t) - \frac{1}{t}\right]_{\alpha}^{A} \\ &= f(A) - f(\alpha) - \frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Comme on a démontré

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\alpha} - 1.}$$

Comme $\alpha < \dfrac{1}{2}$ cette quantité est bien positive.

Facultatif type ENS

Première partie

1. Soit $c > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\ln(cx)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln c}{\ln x}$$

comme ln tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(cx)}{\ln(x)} = 1$$

$$\boxed{\text{La fonction logarithme est à variation lente.}}$$

2. Dans ce cas, comme $c > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} cx = +\infty$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(cx) = \ell$$
Comme ℓ est un réel non nul :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{\ell}{\ell}$$
$$\boxed{\text{Si } \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}^* \text{ alors } f \text{ est à variation lente.}}$$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ mais n'est pas à variation lente.
$x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ (prolongée en 1 de façon arbitraire) tend vers 0 en $+\infty$ et est à variation lente.

Deuxième partie

4. Par opération la fonction $u \mapsto \dfrac{h(u)}{u}$ est continue sur $[2;\, +\infty[$, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est dérivable (et de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[2;\, +\infty[$, de dérivée sur cet intervalle $x \mapsto \dfrac{h(x)}{x}$. Par composition avec la fonction exponentielle, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$$\forall x \in [2;\, +\infty[\qquad f'(x) = \frac{h(x)}{x} a \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{h(x)}{x} f(x)$$
Comme f est à valeurs strictement positives
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [2;\, +\infty[,\ h(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}.}$$

5. **Un exemple**
   (a) D'après ce qui précède h doit vérifier
$$\forall x \in [2;\, +\infty[\qquad h(x) = \frac{x\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$$
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est définie sur $]1;\, +\infty[$ continue sur cet intervalle et de limite nulle en $+\infty$. De plus une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u \ln u}$ sur $[2;\, +\infty[$ est $u \mapsto \ln(|\ln u|)$.
Donc pour $x \in [2;\, +\infty[$
$$\begin{aligned} a \exp\left(\int_2^x \frac{1}{u\ln u}\,\mathrm{d}u\right) &= a \exp\left(\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))\right) \\ &= a\frac{\ln x}{\ln 2} \end{aligned}$$
Il suffit de poser $a = \ln(2)$ qui est bien strictement positif.
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [2;\, +\infty[,\ \ln(x) = \ln(2) \exp\left(\int_2^x \frac{1}{u\ln u}\,\mathrm{d}u\right).}$$
La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u\ln u}$ est continue sur $]1;\, +\infty[$, on peut donc prolonger l'égalité précédente sur cet intervalle.

6. **Structure du raisonnement assez classique**
Soit $\epsilon > 0$ fixé, en utilisant la définition de $\lim\limits_{+\infty} h(u) = 0$, il existe $M > 2$ tel que :
$$\forall x \geqslant M \qquad |h(u)| \leqslant \epsilon$$
Soit x plus grand que ce réel M :
$$\int_M^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_M^x \left|\frac{h(u)}{u}\right|\mathrm{d}u \leqslant \epsilon \int_M^x \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \epsilon\left(\ln(x) - \ln(M)\right)$$
Donc pour x plus grand que M :
$$\begin{aligned} f(x) &= a \exp\left(\int_2^M \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_M^x \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant a \exp\left(\int_2^M \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \epsilon(\ln(x) - \ln(M))\right) && \text{car exp est croissante et } a > 0 \\ &\leqslant C_1 x^\epsilon && \text{avec } C_1 = \frac{a\exp\left(\int_2^M \frac{h(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)}{M^\epsilon} \end{aligned}$$
On remarque que C_1 est positif.
La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^\epsilon}$ est continue positive sur le segment $[2;\, M]$ donc admet un maximum positif que l'on note C_2. On a alors
$$\forall x \in [2;\, M] \qquad f(x) \leqslant C_2 x^\epsilon$$
Finalement on note $C = \max(C_1, C_2)$, comme les quantités manipulées sont positives :
$$\forall x \in [2;\, M] \qquad C_2 x^\epsilon \leqslant C x^\epsilon \text{ et } \forall x \in [M;\, +\infty] \qquad C_1 x^\epsilon \leqslant C x^\epsilon$$
$$\boxed{\text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } C > 0 \text{ tel que } \forall x \in [2;\, +\infty[,\ f(x) \leqslant Cx^\epsilon.}$$

7. **Cas** $c > 1$ Fixons $\epsilon' > 0$, par définition de $\lim_{+\infty} h$, il existe $M > 2$ tel que

$$\forall x \in [M; +\infty[\qquad |h(x)| \leqslant \epsilon'$$

donc pour x plus grand que M (les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens)

$$\left| \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u \right| \leqslant \epsilon' \left(\ln(cx) - \ln(x)\right)$$

donc

$$\left| \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u \right| \leqslant \epsilon' \ln(c)$$

Soit $\epsilon > 0$, on applique le raisonnement précédent à $\epsilon' = \epsilon \ln(c)$ qui est bien strictement positif.

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists M \in [2; +\infty[, \quad \forall x \in [M; +\infty[\qquad \left| \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u \right| \leqslant \epsilon$$

Ce qui est exactement la définition de

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = 0$$

Cas $c < 1$ Dans ce cas on constate que

$$\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = -\int_{cx}^{x} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = -\int_{x'}^{x' \frac{1}{c}} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u$$

En posant $x' = cx$. On peut donc appliquer le résultats précédent avec $c' = \dfrac{1}{c}$ qui est strictement plus grand que 1.
Comme $c > 0$:

$$\lim_{x \to} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = -\lim_{x' \to +\infty} \int_{x'}^{x' \frac{1}{c}} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = 0$$

Cas $c = 1$ l'intégrale étudiée est nulle.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u = 0.}$$

8. Pour $c > 0$ et $x > 2$.

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \exp\left(\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} \,\mathrm{d}u \right)$$

En utilisant la question précédente et la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est à variation lente.}}$$

Troisième partie.

9. Soit u un réel et n un entier naturel non nul

$$\left[X \leqslant u - \frac{1}{n}\right] \subset [X < u] \subset [X \leqslant u]$$

donc par croissance d'une probabilité

$$P\left(X \leqslant u - \frac{1}{n}\right) \leqslant P(X < u) \leqslant P(X \leqslant u)$$

donc

$$F\left(u - \frac{1}{n}\right) \leqslant P(X < u) \leqslant F(u)$$

Comme F est continue

$$\lim_{n \to +\infty} F\left(u - \frac{1}{n}\right) = F(u)$$

et en utilisant le théorème des gendarmes

$$P(X < u) = F(u) = P(X \leqslant u)$$

Soit u un réel

$$\begin{aligned} \overline{F}(u) &= 1 - \mathbb{P}(X < u) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant u) && \text{calcul précédent} \\ &= 1 - F(u) \end{aligned}$$

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\overline{F} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

10. (a) Comme le support de X est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit $F(0) = 0$.
La fonction F est croissante, continue et $\lim_{+\infty} F = 1$, donc $\overline{F}$ est continue, décroissante sur $\mathbb{R}$, $\overline{F}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \overline{F} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\lim_{+\infty} \overline{F} = 0$. il existe $x_1 > 0$ tel que $\overline{F}(x_1) < \dfrac{1}{n} < \overline{F}(0)$. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0; x_1]$ et la fonction continue $\overline{F}$.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } a_n \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \overline{F}(a_n) = \frac{1}{n}.}$$

(b) Comme dans ce cas la fonction $\overline{F}$ est strictement décroissante on pourrait appliquer le théorème de la bijection qui donne l'unicité et permet une rédaction plus facile de la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on doit résoudre

$$\exp(-\lambda a_n) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\ln n}{\lambda}.}$$

ce réel est bien positif.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X est une variable aléatoire à valeurs positives et qui par hypothèse admet une espérance. Comme de plus $a_n > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(X \leqslant a_n) \leqslant \frac{E[X]}{a_n}$$

donc

$$\overline{F}(a_n) \leqslant \frac{E[X]}{a_n}$$

puis

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{E[X]}{a_n}$$

a_n étant positif

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ E[X] \geqslant \frac{a_n}{n}.}$$

(d) On raisonne par l'absurde en utilisant le résultat précédent.

11. Soit $u > 0$ Comme g est à variation lente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$$g(ua_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(a_n)$$

et

$$g(a_n) = \overline{F}(a_n)a_n^\alpha = \frac{a_n^\alpha}{n}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant ua_n) &= \overline{F}(ua_n) && \text{définition de } \overline{F}\\
&= \frac{g(ua_n)}{(ua_n)^\alpha}\\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{a_n^\alpha}{n(ua_n)^\alpha} && \text{calculs précédents}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant ua_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nu^\alpha}.}$$

12. Soit $u > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{a_n} \geqslant u\right) &= \mathbb{P}\left(\max(X_1,\dots,X_n) \geqslant ua_n\right) && \text{car } a_n > 0\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\max(X_1,\dots,X_n) < ua_n\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_i^n [X_i < ua_n]\right)\\
&= 1 - \prod_i^n \mathbb{P}\left([X_i < ua_n]\right) && \text{indépendance}\\
&= 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left([X_i \geqslant ua_n]\right)\right)^n && \text{les va ont même loi}\\
&= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \mathbb{P}\left([X_i \geqslant ua_n]\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Or en utilisant la question précédente et $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([X_i \geqslant ua_n]\right) = 0$$

En utilisant

$$\ln(1+y) \sim_{y\to 0} y$$

$$n\ln\left(1 - \mathbb{P}\left([X_i \geqslant ua_n]\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{u^\alpha}$$

ce qui démontre

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{a_n} \geqslant u\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{u^\alpha}\right).}$$