Variables aléatoires discrètes.

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Octobre 2023

Table des matières

I Variables aléatoires discrètes

I.1 Premières définitions.

Exemples :

- On joue à pile ou face. Si on obtient un pile on gagne 0 point sinon on gagne 1 point. On vient de créer une fonction
$$\Omega \to \{0;1\} \subset \mathbb{R}$$
Où Ω est l'espace probabilisé associé à cette expérience
- On lance un dé si le résultat est pair on obtient 0 point sinon on obtient 1 point. On vient de créer une fonction
$$\Omega' \to \{0;1\} \subset \mathbb{R}$$
Ces deux jeux sont différents, mais du point de vue du joueur, les gains et les résultats sont identiques.

Définition 1 (Variable aléatoire)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ *un espace probabilisable. Une* variable aléatoire réelle *est une application*

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

qui vérifie la la propriété suivante : pour tout réel a, l'ensemble

$$\left\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\right\}$$

est un événement de l'expérience aléatoire, noté
$$[X \leqslant a]$$

Notations

- $[X \leqslant a] = \left\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\right\}$
- $[X = a] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_1\}$
- $[X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \geqslant a\}$
- $[X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant b\}$
- $[X < b] == \{\omega \in \Omega / X(\omega) < b\}$
- $[a \leqslant X \leqslant b] == \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$

Proposition 1 (Événements liés à une variable aléatoire)**.**

Tous ces sous ensembles de Ω *précédemment définis sont des événements.*

Démonstration :

Définition 2 (Variable aléatoire discrète (v.a.d.))**.**
Soit X une variable aléatoire alors on dit que X est une variable aléatoire discrète *dans le cas où* le support $X(\Omega)$ *est un sous ensemble de* $\mathbb{R}$ *fini ou dénombrable :*

En pratique une variable aléatoire X discrète vérifie l'une des conditions suivantes :

1. $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini.
2. $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ infini
3. Plus généralement il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que

$$X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in A\}$$

Remarque : Si X est une variable aléatoire de support $X(\Omega)$ et que $x_0 \in X(\Omega)$ est tel que $P(X = x_0) = 0$ alors on peut considérer que l'on ne modifie pas la variable aléatoire si on considère que le support est privé de x_0.

Proposition 2 (Fonction indicatrice)**.**
Soit A un événement on pose

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{1}_A & : & \Omega & \rightarrow & \{0,1\} \\ & & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & si\, \omega \in A \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est une variable aléatoire

Exemples

1. Considérons l'expérience qui consiste à jeter trois pièces équilibrées. Si l'on désigne par X le nombre de piles obtenus, X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

2. D'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20, on tire sans remise 3 boules. Appelons X le plus grand des numéros tirés. X est une variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs de 3 à 20.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On répète le jet d'une pièce jusqu'à ce que pile apparaisse, mais au plus n fois. On désigne par X le nombre de jets réalisés jusqu'à l'arrêt de l'expérience. X est une v.a.d. pouvant prendre n'importe laquelle des valeurs de 1 à n.
4. D'une urne contenant 3 boules rouges, 3 blanches et 5 noires, on tire 3 boules. Supposons que l'on reçoive 1 point pour toute boule blanche tirée et que l'on doive au contraire payer 1 point pour toute boule rouge. On désigne par X le bénéfice net laissé par le tirage. X est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ou 3.

Proposition 3 (Système complet d'événement lié à une variable aléatoire discrète)**.**
Soit X une v.a.d. alors $([X = x_i])_{x_i \in X(\Omega)})$ est un système complet d'événement. (certain événement peuvent être de probabilité nulle)

I.2 Opérations sur les variables aléatoires discrètes

Proposition 4 (Somme, produit)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisé, et X, Y deux variables aléatoires discrètes et λ un réel. Alors les applications suivantes sont des variables aléatoires discrètes :

1. $(X+Y) : \omega \to X(\omega) + Y(\omega)$
2. $(X.Y) : \omega \to X(\omega) \times Y(\omega)$
3. $(\lambda X) : \omega \to \lambda . X(\omega)$

Démonstration :
Admis

Notation

Dans toute la suite, on indexe $X(\Omega)$ par $I \subset \mathbb{N}$, c'est à dire que l'on peut écrire $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$, I peut être fini ou infini (dénombrable).

I.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3 (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ alors la loi *de X est l'application*

$$\begin{array}{rccl} L_X : & X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(X = x) \end{array}$$

On devrait noter $P([X = x])$

Exemple : on lance un dé une infinité de fois et on choisit comme variable aléatoire le numéro du premier lancer qui donne 6.

Proposition 5 (Propriété caractéristique de la loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X un variable aléatoire discrète alors :

1. $\forall x \in X(\Omega) \qquad 0 \leqslant L_X(x) \leqslant 1.$
2. $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} L_X(x) = 1$

La dernière somme est soit une somme finie soit la somme totale d'une série absolument convergente.

Attention : On admet que pour une série *absolument* convergente l'ordre de sommation n'a pas d'importance.
La façon dont on énumère l'ensemble $X(\Omega)$ n'a donc pas d'importance pour les calculs, néanmmoins pour faciliter les notations, il est d'usage de choisir une énumération croissante.

Réciproquement : Si $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace probabilis**able** infini et dénombrable et $(p_i)_{i \in I}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$) est une suite de réels vérifiant

$$\begin{array}{rll} \forall k \in I \qquad p_i & \geqslant 0 & \text{(i)} \\ \displaystyle\sum_{i \in I} p_i & = 1 & \text{(ii)} \end{array}$$

et soit (x_i) une suite de réels deux à deux distincts Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{T})$ et une variable aléatoire discrète X sur Ω, telles que

$$X(\Omega) \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I \quad P(X = x_i) = p_i.$$

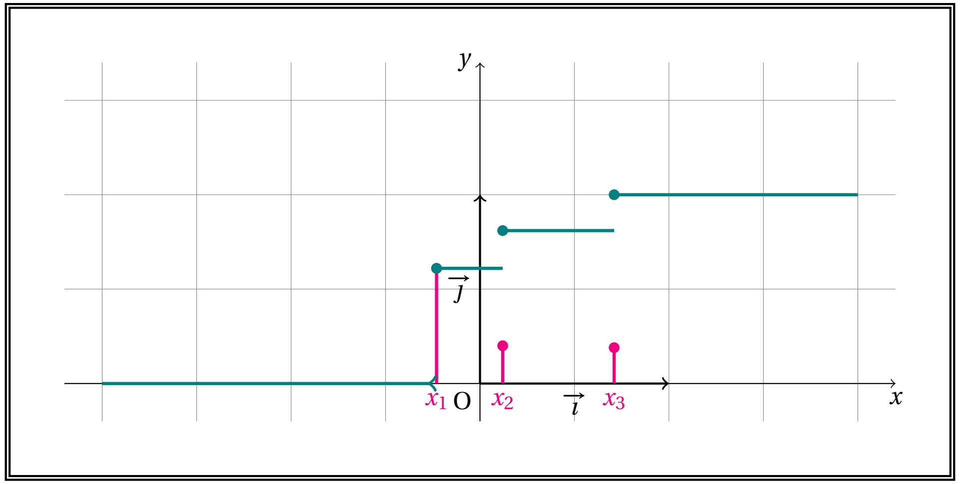
De même, si $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace probabilis**able** fini de cardinal m et $(p_i)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ est une suite finie de réels vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessus. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une suite finie de réels.
Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{T})$ et une variable aléatoire discrète X sur Ω, telles que

$$X(\Omega) \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(X = x_i) = p_i.$$

I.4 Fonction de répartition

Définition 4 (Fonction de répartition)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω*. On appelle* fonction de répartition *de X l'application*

$$\begin{array}{rccc} F_X(a): & \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ & a & \mapsto & P(X \leqslant a) \end{array}$$



Une loi et la fonction de répartition associée

Proposition 6 (Lien entre loi et fonction de répartition)**.**
Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$F_X(a) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leqslant a}} P(X = x_k).$$

Proposition 7 (Propriétés d'une fonction de répartition)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$

1. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim_{+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\lim_{-\infty} F_X(x) = 0$.
4. *F_X est continue en tout point de $\mathbb{R}$* ***sauf*** *au points $a \in X(\Omega)$.*

5. *En une telle valeur $a \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite et discontinue à gauche. De plus, la valeur du « saut à gauche de a » est $P(X=a)$. plus précisement*

$$P(X=a) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

Il est parfois plus facile de calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète puis d'en déduire sa loi grace au théorème précédent.

Exemple : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré. Déterminer la loi de probabilité de X dans les deux cas

1. le tirage se fait avec remise.
2. le tirage se fait sans remise.

I.5 Lois usuelles à connaitre

Dans toute la suite on considère $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète.

I.5.a Loi de Bernouilli [1]

modèle
On lance une pièce telle que la probabilité d'obtenir « Pile » est $p \in]0;1[$. On pose $X : \Omega \to \{0,1\}$ la variable aléatoire discrète telle que $X(\{Pile\}) = 1$ et $X(\{Face\}) = 0$.

Définition 5 (Loi de Bernoulli)**.**
On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli *de paramétre* $p \in]0,1[$ *si*

$$X(\Omega) = \{0,1\}$$

et

$$P(X=0) = 1-p \quad \text{et } P(X=1) = p$$

On écrira alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ *ou* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$.

1. Jacques Bernoulli 1759–1789

Proposition 8 (Fonction de répartition)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Benouilli de paramètre p, alors F_X, la fonction de repartition est définie pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1-p & si\ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & si\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

I.5.b Loi uniforme

Modèle
On lance un dé à n faces, non pipé et on considère la variable aléatoire qui au tirage associe le numéro.

Définition 6 (Loi uniforme)**.**
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme *sur $[\![1, n]\!]$ si*

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

et

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On écrira alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

Proposition 9 (Fonction de répartition d'une loi uniforme)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi uniforme et telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ \frac{1}{n} & si\ 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{2}{n} & si\ 2 \leqslant x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{n-1}{n} & si\ n-1 \leqslant x < n \\ 1 & si\ n \leqslant x \end{cases}$$

Définition 7 (Cas général hors programme)**.**
On dit que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$ si $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ et pour tout $i \in [\![a, b]\!]$, $P(X = i) = \dfrac{1}{b-a+1}$

I.5.c Loi binomiale

Modèle On compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 8 (Loi binomiale)**.**
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binômiale *de paramètres n et p si*

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

et

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque : Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$

Exemples

1. Tirages avec remise dans une urne avec des billes de 2 couleurs. Par exemple des boules blanches en proportion p, des boules noires en proportion $1-p$.
2. Lancers répétés d'une pièce.

Remarque Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ alors $(n-X) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$. Il suffit en effet d'intervertir les notions de succès et d'echecs.

I.5.d Loi géométrique

Modèle On répète des expériences de Bernoulli identiques et indépendantes et on considère le rang d'apparition du premier succès.

Définition 9 (Loi géométrique)**.**

On dira qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique *de paramètre $p \in]0,1[$ si*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = pq^{k-1}.$$

On écrira alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exemple Une urne contient N boules blanches et M noires. On tire des boules une à une avec remise jusqu'à l'apparition d'une noire. Quelle est la probabilité qu'il faille exactement n tirages ? Quelle est la probabilité qu'il faille au moins k tirages ?

Absence de mémoire

Proposition 10.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique alors pour tous entiers naturels m et n, alors

$$P_{X>n}(X>m) = P_{X>m}$$

I.5.e Loi de Poisson [2]

Modèle Il n'y a pas de modèle type, en pratique on admet par hypothèse qu'un phénomène peut être modélisé à l'aide d'une loi de Poisson, on ver dans un chapitre ultérieur que cette modélisation peut être vue comme une limite de modèles binomiaux.

Définition 10 (Loi de Poisson)**.**
On dira qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson *de paramètre $\lambda > 0$ si*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

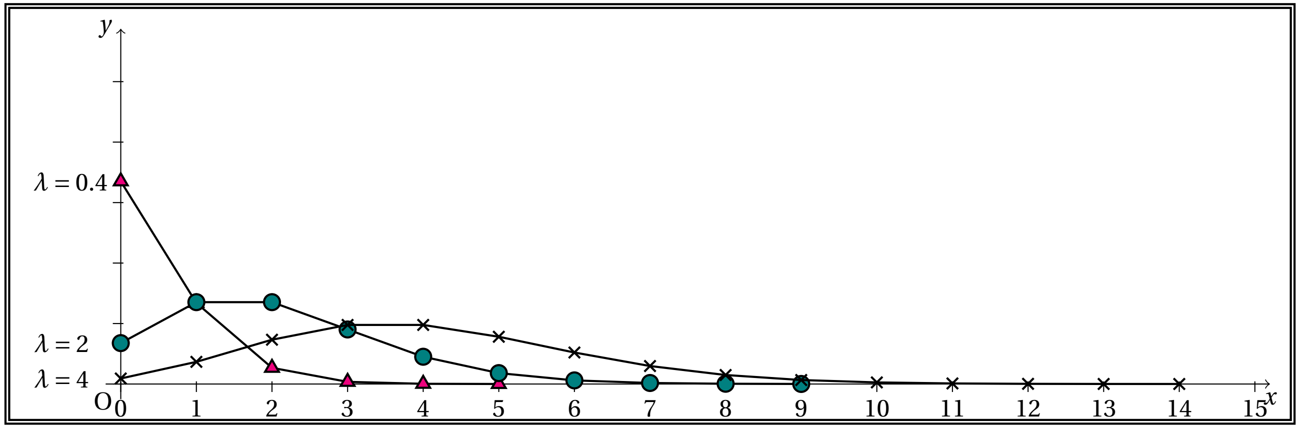
On écrira alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

On vérifie aisément que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

et que ces termes sont positif.

2. Siméon Denis Poisson 1781–1840



Loi de Poisson pour différents paramètres.

Exemple Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre donné suive une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{2}$. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur une page donnée.

II Indépendance

II.1 Définitions et propriétés

Définition 11 (Indépendance de deux variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. *On dit que X et Y sont* indépendantes *si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

.

Méthodes

On doit se servir de la définition précédente de deux manières différentes.

1. Si l'énoncé précise que les deux variables aléatoires sont indépendantes, ou si c'est sous-entendu ("deux dés lancés", " deux tirages dans une même urne avec remise..."). Alors il faut utiliser la relation de la définition pour faire des calculs .
2. L'énoncé introduit deux variables aléatoires discrètes, et demande (éventuellement après plusieurs calculs) si ces deux variables aléatoires sont indépendantes ou non. Il faut alors vérifier si les égalités $\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$ sont vérifiées pour montrer l'indépendance ou trouver un contre exemple pour démontrer la non indépendance. Un contre exemple est par exemple deux valeurs x_i et y_j telles que $P([X=x_j]\cap[Y=y_j]) \neq P(X=x_j)P(Y=y_j)$.

Définition 12 (Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes)**.**
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires.
*On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si*

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega),\ \forall \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap [X_i = x_i]\right) =$$

Définition 13 (Indépendance mutuelle d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout partie $I \subset \mathbb{N}$ finie les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes au sens précédent.

III Espérance

III.1 Définitions

Définition 14 (Espérance d'une variable aléatoire discrète)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

1. *Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini, alors on appelle* espérance *de X le nombre*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.P(X = x_k)$$

2. *Si $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in I\}$ est infini et où $I \subset \mathbb{N}$,*

On dit que X admet une esp̂erance *lorsque la série* $\sum\limits_{x_n \in X(\Omega)} x_n.P(X = x_n)$ *est* ***absolument*** *convergente. L'* espérance *de* X *est alors*

$$E(X) = \sum_{n \in I} x_n.P(X = x_n)$$

Remarque : si X est une variable aléatoire finie (*i.e.* $X(\Omega)$ est finie) alors X admet forcément une espérance, dans le cas ou X est une variable aléatoire discrète infinie il faut commencer par vérifier la convergence absolue de la série $\sum x_k P([X = x_k])$, ce que l'on désigne dans le cas où c'est vrai par « X admet une espérance » , avant de calculer l'espérance.

Attention : Une variable aléatoire discrète infinie n'admet pas forcément une espérance en effet, soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \left\{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$ et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P([X = 2^n]) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

alors X n'admet pas d'espérance.

La convergence absolue nous permet de permuter les termes lors du calcul de l'espérance et ce sans changer la valeur de l'espérance.

III.2 Espérance des lois usuelles

Proposition 11 (A connaître)**.**

Loi de Bernouilli *Soit* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$, *alors :*

$$E(X) = p$$

Loi uniforme *Soit* $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ *alors :*

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Loi binomiale *Soit* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ *alors :*

$$E(X) = np$$

Loi géométrique *Soit* $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ *alors* X *admet une espérance et :*

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Loi de Poisson *Soit* $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. *alors* X *admet une espérance et :*

$$E(X) = \lambda$$

Démonstration :
Calculs à savoir faire sans hésiter.

III.3 Théorèmes de transfert et conséquences

problématique On lance une pièce qui donne « Pile » avec la probabilité 1 si on obtient « Face » on perd 1 point si on obtient « Pile » on 1 point. On pourrait recommencer les calculs précédents, pour en déduire la loi de cette variable aléatoire, mais nous allons plutôt remarquer que la variable aléatoire discrète Y définie dans cet énoncé est de la forme

$$Y = 2X - 1$$

où $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$
Plus généralement, on connait un certain nombre de loi, on aimerait pouvoir utiliser ces résultats pour calculer les caractéristiques d'autres lois.
Soit X un variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$. et

$$f : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x_i & \mapsto & f(x_i) \end{array}$$

La plupart du temps en considère en fait

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Proposition 12 (Image d'une v.a.d.)**.**
La fonction $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire ***discrète****.*

lemme **1** (Lemme des coalitions)**.**
Soit $(X_1, X_2, \dots X_p, X_{p+1}, X_n)$ n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
Alors toute fonction des v.a.d. $X_1, \dots X_p$ est indépendante de toute fonctions de $X_{P+1}, \dots X_n$

Exemple : Si X_1 X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes alors X_1 est indépendante de $\max(X_2, X_3)$

Remarque : On peut étendre ce résultat à plus de deux coalitions, notamment si $(X_1, \dots X_n)$ sont mutuellement indépendantes alors $(u_1(X_1), \dots, u_n(X_n))$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 1 (Théorème de transfert)**.**
*On reprenant les notations précédentes. La variable aléatoire discrète $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i\in I} f(x_i)P(X=x_i)$ est **absolument convergente**, et dans ce cas*

$$E(f(X)) = \sum_{i\in I} f(x_i)P(X=x_i)$$

Attention : On ne calcule pas la loi de $Y = f(X)$ pour faire ce calcul, et c'est tout l'intéret de ce résultat.

III.4 Propriétés de l'espérance

Proposition 13 (Transformation affine)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance, alors :

$$E(aX+b) =$$

Théorème 2 (Linéarité)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{T})$ et qui admettent une espérance alors $X+Y$ admet une espérance et :

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Proposition 14 (Croissance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, on suppose de plus que

$$P(X \leqslant Y) = 1$$

alors

$$E(X) \leqslant E(Y)$$

Remarque : cela s'applique notamment au cas $a \leqslant X \leqslant b$ où a et b sont deux constantes

IV Variance et écart type, moments

IV.1 Définitions : variance et écart type.

Définition 15 (Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète)**.**
*Soit X une variable aléatoire discrète **admettant une espérance**. La* variance *de X est si elle existe la quantité*

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$$

Dans ce cas là, on appelle alors écart-type *de X la racine de $V(X)$*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Définition 16.
On dit que X est une variable aléatoire discrète presque certaine si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X = a) = 1$$

C'est à dire

$$P(X \neq a) = 0$$

Proposition 15 (Caractérisation d'une variable presque certaine)**.**

- *Soit X une variable aléatoire certaine telle que $X(\Omega) = \{a\}$ alors*

$$E(X) = a \qquad V(X) = 0$$

- *Réciproquement si X est un variable aléatoire discrète telle que $V(X) = 0$ alors X esrt une variable aléatoire discrète presque certaine*

Théorème 3 (Formule de König-Huyghens)**.**
*Soit X une variable aléatoire discrète **admettant une espérance** et une variance.*
Alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance et dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Remarque : X admet une variance lorsque la série $\sum_{x_n \in X(\Omega)} (x_n - E(X))^2.P(X = x_n)$ est absolument convergente.

La variance de X est alors

$$V(X) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} (x_n - E(X))^2.P(X = x_n)$$

Proposition 16 (Variance des lois usuelles)**.**
Il faut connaître et savoir démontrer ces résultats.

Loi de Bernouilli *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, et $q = 1 - p$ alors :*

$$V(X) = qp = p(1-p)$$

Loi uniforme *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors :*

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Loi uniforme, cas général (HP) *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors :*

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

Loi binomiale *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ alors en posant $q = 1-p$:*

$$V(X) = npq = np(1-p)$$

Loi géométrique *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors X admet une espérance et en posant $q = 1-p$*

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Loi de poisson *Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. alors X admet une espérance et*

$$V(X) = \lambda$$

Démonstration :

On utilise très souvent le théorème 3 et la remarque $k^2 = k(k-1)+k$, ou

$$E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$$

IV.2 Propriétés

Proposition 17 (Transformation affine)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance, alors :

$$V(aX+b) =$$

IV.3 Moments d'une variable aléatoire discrète.

Définition 17 (Moment d'ordre s d'une variable aléatoire discrète)**.**

Soit $s \in \mathbb{N}$.

On dit que X admet un moment d'ordre s *lorsque la série $\sum_{n\in I} x_n^s.P[X = x_n]$ est absolument convergente.*

Le moment d'ordre s *de X est dans ce cas*

$$m_s(X) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} x_n^s.P(X = x_n)$$

Proposition 18 (Calculs pratique des moments)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète et $s \in N$, alors :

$$m_s(X) = E[X^s]$$

Proposition 19 (Propriétés)**.**
Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre $s \in R$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant s$.
Alors X admet un moment d'ordre r.

IV.4 Variables centrées et variables centrées réduites

Définition 18.

- *Soit X une variable aléatoire discrète qui admet une espérance. Alors on dit que X est* centré *si et seulement si*

$$E(X) = 0$$

- *Soit X un variable aléatoire discrète qui admet une espérance. Alors on dit que X est* réduite *si et seulement si*

$$V(X) = 1$$

Proposition 20 (Transformation en un variable aléatoire centrée réduite)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète qui admet une espérance et une variance non nulle alors :

$$Y = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)}$$

est la variable aléatoire discrète réduite et centrée associée *à X Et Y est une variable aléatoire discrète réduite et centrée.*

A Programmes Python

Les fonctions permettant de simuler les lois classiques existent dans les modules `numpy.random` ou `random`, nous proposons ici des versions naïves de fonctions simulant plusieurs fois une loi donnée et renvoyant un tableau des résultats. Nous utilisons le module `numpy.random` avec l'alias `rd` et uniquement la fonction `random` de ce module. Cette fonction renvoie un réel choisi au hasard, uniformément, dans $]0;1[$.

```python
def geometrique(nb,p):
        '''renvoie nb réalisations d'une vad suivant une loi géométrique de paramètre p'''
        L=[]
        for i in range(nb):
                k=0
                while rd.random()>p:
                        k=k+1 #compte le nombre de face
                L.append(k+1)
        return L


def binomiale(nb,n,p):
        '''simule nb expériences binomiales de paramètres n,p
        renvoie une liste'''
        L=[]
        for i in range(nb):
                nbs=0 # compteur succès
                for j in range(n):
                        if rd.random()<p:
                        nbs=nbs+1
                L.append(nbs)
        return L
```

B Récapitulatifs sur les lois usuelles : résultats à connaître

Nom	Notation	Paramètre(s)	Support	Loi	Espérance	Variance	Modèle
Certaine			$X(\Omega) = \{a\}$	$\mathbb{P}(X = a) = 1$	a	$V(X) = 0$	
Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$	$p \in]0;1[$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$	p	$p(1-p)$	Expérience à deux issues, lancer d'une pièce
Uniforme sur $[\![1, n]\!]$	$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^*$	$[\![1, n]\!]$	Pour $k \in [\![1, n]\!]$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	Lancer d'un dé, tirage dans une urne non truquée
Uniforme sur $[\![a, b]\!]$	$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$	$a < b$ deux entiers	$[\![a, b]\!]$	Pour $k \in [\![a, b]\!]$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	HP
Loi binomiale	$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$	$n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$	$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$	Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	Nombre de succès lors de la répétitions de n expériences de Bernoulli identiques, indépendantes
Loi géométrique	$X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$	$p \in]0;1[$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Rang du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli identiques indépendantes
Loi de Poisson	$X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	Modélisation imposée par l'énoncé, nombre de passage dans un lieu lors d'une durée fixée