Problème 1

Partie 1 : une solution exacte

1. a) Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = -cu_0'(x-ct) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial U}{\partial x}(t,x) = u_0'(x-ct).$$

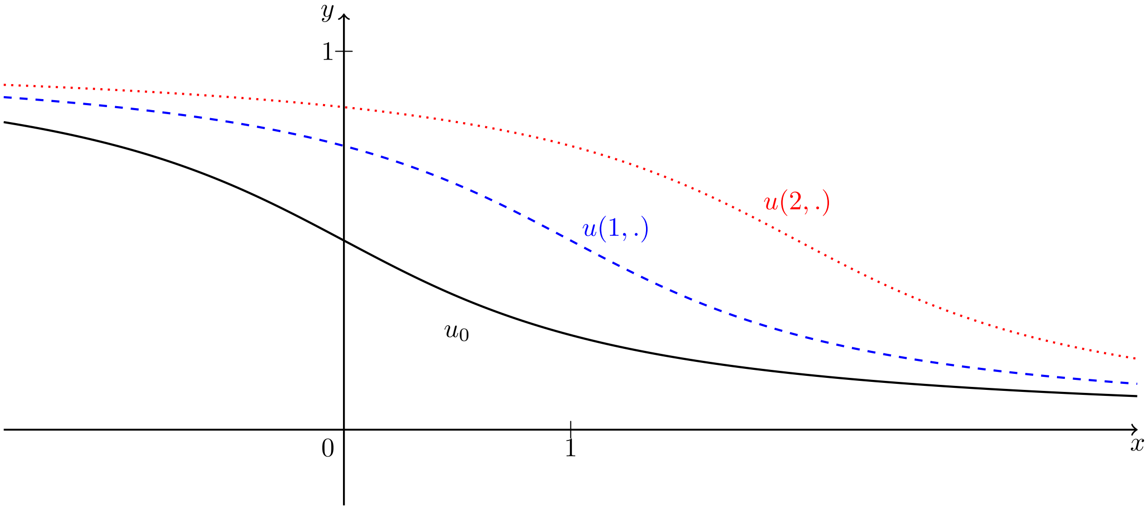
b) D'après la question précédente, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial U}{\partial c}(t,x) = -cu_0'(x-ct) + cu_0'(x-ct) = 0.$$

Donc U est bien solution de (1).

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(0,x) = u_0(x)$.
On dit que u_0 est une condition initiale car la variable t désigne souvent le temps et que la fonction U coïncide avec la fonction u_0 à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'instant initial.

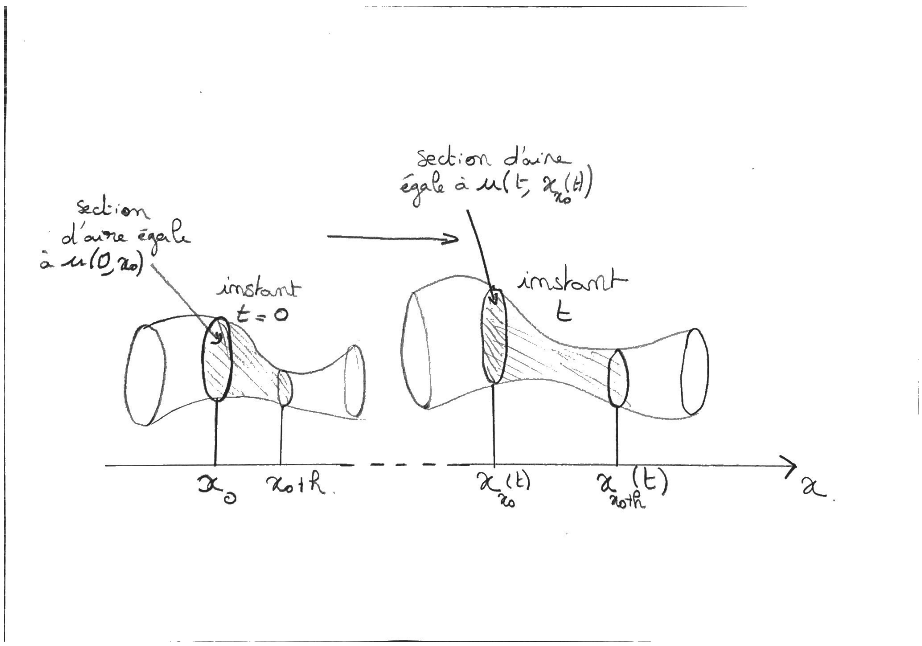
3.



À partir de la courbe représentative de u_0 on obtient les courbes représentative de $u(1,.)$ et $u(2,.)$ par translation de vecteur $\vec{i}$ et $2\vec{i}$. On comprend donc la notion de transport.

Partie 2 : Étude d'une situation biologique simplifiée

4.



5. L'hypothèse c positif signifie que le sang s'écoule « vers la droite » ou encore « vers les x croissants ».
6. On a ici deux équations différentielles du type $y' = cste$ donc les solutions sont des fonctions affines.
   On a donc x_{x_0} et x_{x_0+h} qui font partie de l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto ct + K$ avec $K \in \mathbb{R}$. La valeur de K est déterminée grâce à la condition initiale.
   $x_{x_0}(0) = x_0$ nous donne $x_{x_0} : t \mapsto ct + x_0$ et $x_{x_0+h}(0) = x_0 + h$ nous donne $x_{x_0+h} : t \mapsto ct + x_0 + h$.
7. a) u étant l'aire d'une section d'artère à un instant t et un abscisse x, $V(t)$ représente le volume de fluide contenu dans l'artère à l'instant t entre les abscisses $x_0 + ct$ et $x_0 + h + ct$, c'est-à-dire le volume de la tranche de fluide considérée dans ces questions à l'instant t.
   b) Effectuons dans l'intégrale donnée pour $V(t)$ le changement de variable $s = z + ct$. Ce changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$, z varie de x_0 à $x_0 + h$ et on a $ds = dz$.
   On obtient, grâce à ce changement de variable :
   $$V(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} u(t, z + ct)dz.$$
   En renommant la variable s, on obtient le résultat demandé.
   c) La fonction u est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et la fonction $(t, s) \mapsto s + ct$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Par composée, $(t, s) \mapsto u(t, s + ct)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
   On applique alors la **règle 2** et on obtient que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad V'(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial}{\partial t}\left(u(t, s + ct)\right) ds$$
8. a) On suppose ici que le volume de fluide ne varie pas avec le temps ce qui correspond à supposer que le fluide est incompressible.
   b) Les fonctions $(t, s) \mapsto t$, $(t, s) \mapsto s + ct$ et $(t, s) \mapsto u(t, s)$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ donc, grâce à la **règle 1.a.** :
   $$\begin{aligned} V'(t) &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial}{\partial t}\left(u(t, s + ct)\right) ds \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)ds \end{aligned}$$
   Ainsi, l'hypothèse $V'(t) = 0$ devient :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial s}(t, s + ct)ds = 0.$$
9. a) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a :
   $$\begin{aligned} G(x_0 + h) - G(x_0) &= \int_0^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)ds - \int_0^{x_0} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)ds \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)ds. \end{aligned}$$
   Donc d'après la question précédente, $G(x_0 + h) - G(x_0) = 0$ et ainsi $G(x_0 + h) = G(x_0)$.
   b) Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $h > 0$:
   $$\frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0.$$
   On pourrait reproduire toutes les questions précédentes pour $h < 0$, donc nous avons en fait montré que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0$.
   Donc $\dfrac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0 ce qui signifie que G est dérivable en x_0 et $G'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0$.
10. On a montré que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $G'(x_0) = 0$.
   Or la fonction $s \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car u est supposée $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. D'après le théorème fondamentale de l'analyse, G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x + ct) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, x + ct)$.
   Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
   $$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_0 + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + ct) = 0.$$
   Pour tout réel x et tout $t \in \mathbb{R}^+$, en prenant $x_0 = x - ct$, l'égalité ci-dessus devient :
   $$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0.$$

Partie 3 : Simulation numérique de l'équation de transport

11. a)
```
def Uzero(x):
    if x<=1:
        return 1
    else:
        return 0
```
b)
```
def MaxiLigne(M):
    n=np.shape(M)[0]
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(max[abs(M[i,j]) for j in range(np.shape(M)[1])])
        # autre option : L.append(max(abs(M[i,:])))
    return L
```

12. a) (i) Les lignes 4 à 7 permettent de remplir la première ligne et la première colonne de la matrice U grâce à la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ (lignes 4 et 5) et la condition au bord $u(t,0) = 1$ (lignes 6 et 7).

(ii) La formule donnée (6) est valable pour $i \in [\![0; N_t - 1]\!]$ donc dans la ligne 8 on met `for i in range(0,Nt)` et elle est valable pour $j \in [\![1; N_x]\!]$ donc à la ligne 9 on met `for j in range(1,Nx+1)`.

b) (i) A. Le paramètre `b` de la fonction `Test` prendra la valeur `False` dès qu'il existe i tel que $C[i] > C[0]$. Par contraposée, la fonction `Test` renvoie `True` si, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $C[i] \leqslant C[0]$.

L'affirmation est donc vraie.

B. La fonction `Test` renvoie `True` ou `False` qui sont des booléens et non des chaines de caractère.

L'affirmation est donc fausse.

C. Lors du passage dans la boucle `for` pour $i = 0$, le test $V[i] > V[0]$ est toujours faux, quel que soit le vecteur V. Ce passage est donc inutile et on peut bien remplacer par `for i in range(1,n)`.

L'affirmation est vraie.

(ii) La fonction `Stable` commence par appliquer la fonction `MaxiLigne` à U et donc construit la liste, que nous appellerons C, contenant les valeurs des éléments maximaux en valeur absolue de chaque ligne de U. En appliquant la fonction `Test` à C on regarde alors si tous les éléments de C sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux au premier coefficient de C.

Cela revient donc à regarder si la valeur maximale, en valeur absolue, des coefficients $u_{i,j}$ est située sur la première ligne de U c'est-à-dire la valeur maximale de $|u|$ est atteinte à l'instant initial. Or à l'instant initial, u vaut 0 ou 1.

Pour conclure la fonction `Stable` appliquée à U permet de savoir si $(t,x) \mapsto u(x,t)$ est bornée par 1 sur $[0;T] \times [0;L]$.

13. a) On sait que la fonction u_0 vaut 1 sur $]-\infty;1]$ et 0 sur $]1;+\infty[$. Donc la figure A2 correspond à la fonction u_0, c'est-à-dire à $u(t_0,.)$.

On sait ensuite que $U(t,x) = u_0(x-t)$. Donc les courbes de $U(t_1,.)$ et $U(t_2,.)$ s'obtiennent à partir de u_0 par des translations de vecteur $t_1\vec{i}$ et $t_2\vec{i}$.

Comme on suppose que $t_1 < t_2$, on peut en déduire que la figure A1 correspond à $U(t_1,.)$ et la figure A3 correspond à $U(t_2,.)$.

b) Si l'on admet que la méthode d'approximation qui nous est donnée est bien construite on devrait avoir une courbe qui se rapproche de plus en plus de la solution réelle lorsque le nombre de points utilisés dans la discrétisation en x devient plus grand.

On sait que la solution réelle est un « créneau » et c'est la courbe en pointillé qui s'en rapproche le plus.

Donc B1 correspond à $N_x^{(2)}$ et B2 correspond à $N_x^{(1)}$.

Problème 2

Partie A : Étude de deux séries réelles

1. La série $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \text{ est divergente}}$ et la série $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \text{ est convergente.}}$

2. a) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

b) La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc pour tout $x > 0$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$.

Il existe donc $c_x \in]x;x+1[$ (on écrit c_x car il dépend de x) tel que :

$$\frac{1}{c_x} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{x+1-x} = \ln(x+1)-\ln(x).$$

Comme $c_x \in]x;x+1[$, on a $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{c_x} \leqslant \frac{1}{x}$.

Pour finir, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1)-\ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.}$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $k \geqslant 2$, en appliquant l'inégalité de droite de la question précédente avec $x=k$ (qui est bien >0), et l'inégalité de gauche pour $x=k-1$ (qui est bien >0) on obtient :

$$\boxed{\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1).}$$

Soit $n \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}(\ln(k)-\ln(k-1)).$$

On voit apparaitre des sommes télescopiques que l'on peut simplifier et il faut aussi ajouter 1 à tous les termes de l'encadrement. On obtient alors :

$$\ln(n+1)-\ln(2)+1 \leqslant A_n \leqslant \ln(n)-\ln(1)+1.$$

Comme $\ln(2)<1$, on a $\ln(n+1)-\ln(2)+1 \geqslant \ln(n+1)$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(n+1) \leqslant A_n \leqslant \ln(n)+1.}$$

(Ceci étant également valable pour $n=1$.)

d) D'après la question précédente, pour $n \geqslant 2$, comme $\ln(n)>0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{A_n}{\ln(n)} \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}.$$

D'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\ln(n)} = 1$, et d'autre part

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

(Attention, il n'est pas correct de composer l'équivalent $n+1 \sim n$ par la fonction $\ln$).

Finalement par encadrement de limites (même limite des deux côtés de l'encadrement), on obtient que $\frac{A_n}{\ln(n)}$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A_n}{\ln(n)} = 1$. On a donc bien $\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

3. a) $u_4 = A_3 - \ln(4) = \frac{11}{6} - 2\ln(2)$. D'après l'encadrement de $\ln(2)$ donné :

$$u_4 \geqslant \frac{11}{6} - 1,4.$$

Or $\frac{11}{6} - 1,4 = \frac{13}{30} \geqslant \frac{12}{30} = 0,4$. Donc $\boxed{u_4 \geqslant 0,4.}$

$v_4 = A_4 - \ln(4) = \frac{25}{12} - 2\ln(2)$. D'après l'encadrement de $\ln(2)$ donné :

$$v_4 \leqslant \frac{25}{12} - 1,3.$$

Or $\frac{25}{12} - 1,3 = 2 + \frac{1}{12} - 1,3 = 0,7 + \frac{1}{12} \leqslant 0,7+0,1 = 0,8$. Donc $\boxed{v_4 \leqslant 0,8.}$

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} - u_n = A_n - \ln(n+1) - A_{n-1} + \ln(n) = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

D'après la question 2.b. on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est croissante.}}$
Pour tout $n \geqslant 2$:

$$v_{n+1} - v_n = A_{n+1} - \ln(n+1) - A_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

D'après la question 2.b. on a $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$
De plus, $v_n - u_n = A_n - A_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont donc adjacentes. D'après le théorème du cours sur les suites adjacentes on en déduit que $\boxed{\text{ces suites sont convergentes et ont la même limite } \ell.}$
Grâce au sens de variation des suites, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ donc en particulier $u_4 \leqslant \ell \leqslant v_4$.
Donc $\boxed{0,4 \leqslant \ell \leqslant 0,8.}$

4. a) On a :

$$\begin{aligned} &\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} \\ \Leftrightarrow &\forall k \geqslant 2, \quad 1 = (a+b)k - a. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir a et b tels que $a + b = 0$ et $-a = 1$ ce qui nous donne $a = -1$ et $b = 1$.
$\boxed{\text{Il existe bien un couple } (a,b) \text{ vérifiant la condition de l'énoncé, il s'agit du couple } (-1,1).}$

b) Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{2}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-2}{k^2(k-1)} \geqslant 0.$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{2}{k^2}.}$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{2}{k^2}$ est aussi convergente. D'après le critère de majoration pour les séries à termes positifs on peut en déduire que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k(k-1)} \text{ est convergente.}}$

c) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ (somme télescopique).}$$

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k-1)} = 1.}$

Pour tout $k \geqslant 2$, $k - 1 \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{k(k-1)} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$.

On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$: $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$.

Or $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k-1)}$, donc $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 1$ et ainsi, en ajoutant 1, $\boxed{B_n \leqslant 2 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

Partie B : 3 cadeaux

5. a) D'après l'énoncé les trois zones sont de même aire donc, la bille a la même probabilité de se trouver dans chacune de ces zones.
$\boxed{\text{La probabilité que la bille se trouve sur la zone 1 à l'issue du premier lancer de roue est } P(A_1) = \frac{1}{3}.}$

b) On cherche ici $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
$\boxed{\text{La probabilité que la bille ne se trouve pas sur la zone 1 à l'issue du second lancer est } P(\overline{A_2}) = \frac{2}{3}.}$

6. a) Notons Y_1 l'événement « la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 lancers de roue ».
On peut écrire :

$$Y_1 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3).$$

Les cinq événements entrant en jeu dans cette union sont incompatibles deux à deux. Donc :

$$P(Y_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3).$$

Les résultats des différents lancers étant indépendants, on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times P(\overline{A_4}) = \frac{2}{3^4}.$$

De même, $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) = P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{2}{3^4}$.
Et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3) = \dfrac{1}{3^4}$. Donc

$$P(Y_1) = 4 \times \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}.$$

$\boxed{\text{La probabilité que la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 lancers de roue est } P(Y_1) = \frac{1}{9}.}$

Il est aussi possible de raisonner par dénombrement, comme dans la question suivante.

b) Dans cette question on s'intéresse encore une fois uniquement aux zones atteinte par la bille lors des 4 victoires.
On peut donc modéliser notre expérience avec l'univers $\Omega = [\![1;3]\!]^4$.
Les événements élémentaires sont équiprobables et $\mathrm{card}(\Omega) = 3^4$.
Notons D l'événement « la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 lancers de roue ».
On a alors $\mathrm{card}(D) = \dbinom{3}{2} \times \dbinom{4}{2}$ car il y a $\dbinom{3}{2} = 3$ façons de choisir les numéros des deux zones qui seront atteinte et $\dbinom{4}{2} = 6$ places possibles pour la première zone (l'autre prenant les deux autres places).
Donc $P(D) = \dfrac{3 \times 6}{3^4} = \dfrac{2}{9}$.

$\boxed{\text{La probabilité que la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 lancers de roue est } P(D) = \frac{2}{9}.}$

7. Notons B l'événement « la super cagnotte a été remporté en au plus 4 lancers de roue ».
L'événement $\overline{B}$ signifie qu'au cours des 4 premières lancers de roue soit on a obtenu au moins 3 fois la même zone soit on a obtenu deux zones distinctes atteintes exactement deux fois chacune. En notant Y_2 l'événement « la bille se trouve sur la zone numéro 2 au moins 3 fois en 4 lancers de roue »et Y_3 l'événement « la bille se trouve sur la zone numéro 3 au moins 3 fois en 4 lancers de roue », on peut donc écrire :

$$\overline{B} = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D.$$

Les événéments (Y_1, Y_2, Y_3, D) sont incompatibles deux à deux donc :

$$P(\overline{B}) = P(Y_1) + P(Y_2) + P(Y_3) + P(D).$$

Nous avons vu que la probabilité d'avoir au moins trois fois la zone 1 au cours des 4 lancers de roue est $P(Y_1) = \dfrac{1}{9}$. Il en est de même pour le fait d'obtenir au moins trois fois la zone 2 et au moins trois fois la zone 3.
Nous avons aussi vu que la probabilité d'obtenir deux zones distinctes atteintes exactement deux fois chacune est $P(D) = \dfrac{2}{9}$.
Donc $P(\overline{B}) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9}$ et ainsi $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{4}{9}$.

$\boxed{\text{La probabilité de remporter la super cagnotte en au plus 4 lancers de roue est donc de } \frac{4}{9}.}$

Partie C : n cadeaux

8. Raisonnons par dénombrement. Si on effectue n tirage, on obtient un n uplet de valeur dans $[\![1;n\,]\!]$, il yt a donc n^n possibilités. Si lors de ces n tirages on obtient n cadeau différents, on a obtenu une permutation des n cadeaux et il y a $n!$ permutations possibles. Comme il y a équiprobabilité :

$$\boxed{P(V_n) = \frac{n!}{n^n}.}$$

9. a)

$$T_{i,k} = \bigcap_{m=1}^{k} S_{i,m}.$$

b) Comme les lancers sont indépendants

$$P\left(T_{i,k}\right) = \prod_{m=1}^{k} P\left(S_{i,m}\right).$$

De plus comme les n zones sont équiprobables et que les lancers sont identiques

$$\forall i \in [\![1;\ n]\!] \qquad \forall m \in \mathbb{N}^* \qquad P\left(S_{i,m}\right) = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\boxed{P\left(T_{i,k}\right) = \frac{1}{n^k}.}$$

10. a)
```
def simulation_jeu(n):
    cadeaux_a_gagner=[i for i in range(1,n+1)]
    #creation de la liste [1,2,...,n] qui represente les cadeaux
    #n'ayant pas encore ete gagnes
    nbre_tour=0
    while cadeaux_a_gagner!=[]:
        nbre_tour+=1
        numero=rd.randint(1,n)
        if numero in cadeaux_a_gagner:
            cadeaux_a_gagner.remove(numero)
    return nbre_tour
```

b) Dans cette fonction on se fixe un entier n et un entier k, on effectue un grand nombre ($N = 10^5$) de fois une simulation du jeu, et à chaque simulation on ajoute 1 à notre variable `s` s'il a fallu k lancers de roue pour obtenir la super cagnotte. À l'issue de la boucle `for`, la variable `s` contient donc le nombre de fois où, au cours de 10^5 répétition de l'expérience, la super cagnotte a été obtenue en k lancers de roue. La fonction renvoie alors la fréquence de réalisation de l'événement « obtenir la super cagnotte en k lancers de roue ».

La fonction `mystere` renvoie donc une valeur approchée de la probabilité de l'événeemnt « obtenir la super cagnotte en k lancers de roue ».