

Géométrie : Produit Scalaire

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Mars 2026

Table des matières

I	Produit scalaire	2
II	Orthogonalité	5
II.1	Définition	5
II.2	Base orthogonale/orthonormale	6
II.3	Théorème spectral	7
III	Projection orthogonale	7
III.1	Sous-espace orthogonal	7
III.2	Projection	8
IV	Notion de distance	9
IV.1	Définitions	9
IV.2	Méthode des moindres carrés	10

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul. Les vecteurs seront notés de préférence $\vec{u}$. Le terme scalaire désignera uniquement les réels, vecteur désignera un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

I Produit scalaire

Définition 1 (Produit scalaire canonique).

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ le **produit scalaire** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Proposition 1 (Propriétés).

1. Le produit scalaire est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
2. Le produit scalaire est **bilinéaire** c'est à dire pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tous scalaires α et β :

Linéarité à gauche

$$\langle \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w} \rangle =$$

Linéarité à droite

$$\langle \vec{u}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} \rangle =$$

3. Le produit scalaire est **symétrique**, c'est à dire que pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle =$$

4. Le produit scalaire est une forme **définie positive** c'est à dire que pour tout vecteur $\vec{u}$:

Positive $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

Définie $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ si et seulement si

Démonstration :

Exercice 1 (Classique : bilinéarité extension).

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ des vecteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ des scalaires. Donner une expression du produit scalaire :

$$\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i, \sum_{i=1}^r \mu_i \vec{v}_i \rangle =$$



Définition 2 (Norme euclidienne).
 Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, on note

$$\|\vec{u}\| =$$

Le vocabulaire n'est pas au programme



Proposition 2 (Propriétés de la norme).
 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout scalaire λ .

Positivité $\|\vec{u}\| \geq 0$.

Séparation $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si

Absolue homogénéité $\|\lambda \vec{u}\| =$

Démonstration :

56



Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Inégalité

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq$$

Cas d'égalité valeur absolue :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \text{ si et seulement si}$$

Cas d'égalité sans valeur absolue :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de même sens c'est-à-dire}$$

Démonstration :

56

Proposition 3 (Inégalité triangulaire).

Inégalité triangulaire/ sous-additivité :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Cas d'égalité : De plus il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens i.e. il existe un réel positif tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

Démonstration :

5

Exercice 2 (Classique : deuxième inégalité triangulaire).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, montrer que

$$\left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Dans quel cas a-t-on égalité?

Proposition 4 (Identités remarquables).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Identité remarquable : $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Identité remarquable $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$

Identité remarquable $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$

Égalité du parallélogramme

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$$

Identité polaire

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

5

Proposition 5 (Expression matricielle : base canonique).

Soit $\vec{u}$ un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est U et $\vec{v}$ un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est V .

Produit scalaire

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = U^T V$$

Norme

$$\|\vec{u}\|^2 = U^T U$$



Attention : Que vaut UU^T ?

II Orthogonalité

II.1 Définition

Définition 3 (Orthogonalité).



Deux vecteurs On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

Deux matrices colonnes On dit que deux matrices colonnes de même taille U et V sont **orthogonales** si et seulement si

Famille orthogonale Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est dite **orthogonale** si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Famille orthonormale Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est dite **orthonormale** si et seulement si elle est orthogonale et si et seulement si tous les vecteurs sont de norme 1.

On trouve aussi **orthonormée**

Proposition 6 (Liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux).

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ **orthogonale** dont **aucun vecteur est nul** est libre.

Démonstration :



Théorème 2 (Pythagore).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si



Démonstration :



II.2 Base orthogonale/orthonormale

Définition 4 (Base orthonormale/ orthogonale).

Une base de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est aussi une famille orthonormale est dit **base orthonormale**.

Proposition 7 (Caractérisation matricielle).

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique alors les trois propositions suivantes sont équivalentes

1. $\mathcal{B}$ est une base orthonormale
2. $P^T P = I_n$
3. $P^{-1} = P^T$

Démonstration :

Proposition 8 (Base canonique).

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale et il existe d'autres bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i$ deux vecteurs. Alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Proposition 10 (Théorème de la base incomplète version orthogonale).

On peut toujours compléter une famille orthonormale en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11 (Calcul des coordonnées dans une base orthonormale).

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n$$

Démonstration :

À savoir démontrer, la méthode est aussi importante que le résultat

ou dans une base orthonormale



II.3 Théorème spectral

Proposition 12 (Orthogonalité de vecteurs propres pour une matrice symétrique réelle).

Soit A une matrice symétrique, X un vecteur colonne propre associé à la valeur propre λ et Y un vecteur colonne propre associé à la valeur propre μ , on suppose de plus que $\lambda \neq \mu$, alors X et Y sont orthogonaux.

Démonstration :

9

Théorème 3 (Théorème spectral pour une matrice symétrique).

Soit A une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale telles que

$$A = PDP^{-1} \quad P^{-1} = P^T$$

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable avec un changement de bases orthonormales

Théorème 4 (Théorème spectral pour un endomorphisme dont la matrice est symétrique).

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice représentative dans **une base orthonormale (la plus part du temps la base canonique)** est symétrique alors il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée uniquement de vecteur propre de f .

III Projection orthogonale

Dans cette partie les sous-espaces vectoriels sont par défaut des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

III.1 Sous-espace orthogonal

Définition 5 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel).

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note

$$E^\perp = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n / \forall \vec{v} \in E \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \}$$

Exemple : Calculons l'orthogonal de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

Proposition 13 (Structure de $E^\perp$).

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

5

Proposition 14 (Décomposition dans $E, E^\perp$).

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

1. Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique couple $(\vec{u}_E, \vec{u}_{E^\perp}) \in E \times E^\perp$ tel que

$$\vec{u} = \vec{u}_E + \vec{u}_{E^\perp}$$

2. $\dim E + \dim E^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$

Démonstration :

6

III.2 Projection

Définition 6 (Projection orthogonale).

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on reprend les notations de la proposition 14 et on définit

$$\begin{aligned} p_E : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{u} &\mapsto \vec{u}_E \end{aligned}$$

p_E est la **projection orthogonale** sur E (parallèlement à $E^\perp$.)

Exemple : Calculons la projection sur $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Proposition 15 (Propriétés d'une projection orthogonale).

1. p_E est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.
2. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de E alors

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad p_E(\vec{u}) = \sum_{i=1}^p \langle \vec{e}_i, \vec{u} \rangle \cdot \vec{e}_i$$

3. La projection orthogonale sur le sous-espace E est l'unique endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = E$ et $\text{Ker}(p) = E^\perp$

Démonstration :

56

Proposition 16 (Lien entre p_E et $p_{E^\perp}$).
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

$$p_E + p_{E^\perp} = id_E$$

Démonstration :

56

Exercice 3.

On se place dans $\mathbb{R}^4$. soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$

1. On pose $\vec{u} = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, -2, 0)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1, -3)$ est une base orthogonale de E .
2. La transformer en une base orthonormale de E
3. Trouver une base orthonormale de $E^\perp$
4. Donner une expression simple de p_E et $p_{E^\perp}$

Démonstration :

56

IV Notion de distance

IV.1 Définitions

Définition 7 (Distance).

Entre deux vecteurs Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la **distance** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Entre un vecteur et une partie Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur, alors **la distance** entre $\vec{u}$ et A est définie par

$$d(\vec{u}, A) = \inf\{d(\vec{u}, \vec{v}) / \vec{v} \in A\}$$

Exemple :

Proposition 17 (Propriétés de la distance entre deux vecteurs).

Soit $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Symétrie $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$

Séparation $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{v}$.

Inégalité triangulaire $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$

Proposition 18 (Distance et projection).

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors

$$d(\vec{u}, E) = \|\vec{u} - p_E(\vec{u})\|$$

Autrement dit le vecteur de E le plus proche de $\vec{u}$ est $p_E(\vec{u})$

Démonstration :

IV.2 Méthode des moindres carrés

On suppose que l'on étudie une série double :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

On suppose de plus que les données de x ne sont pas constantes.

Définition 8 (Régression linéaire).

Une droite de régression est la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Théorème 5 (Forme théorique).

On note $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur associé à la série x .

On note $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le vecteur associé à la série y .

On note $\vec{u} = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{x})$ alors le minimum de la quantité $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$, quand a et b décrivent $\mathbb{R}$, vaut

$$m = d(\vec{y}, F)$$

Ce minimum est atteint pour un unique couple (a, b) qui vérifie

$$p_F(\vec{y}) = a\vec{x} + b\vec{u}$$

Démonstration :

5

Proposition 19 (Forme pratique).

En reprenant les notations précédentes, la droite de régression linéaire est la droite $y = ax + b$ où

- $a = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2}$.
- $b = \bar{y} - \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2} \bar{x}$
- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$: moyenne de la série x .
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$: moyenne de y .
- $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ variance de la série x .
- $\sigma_{x,y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \langle \vec{x} - \bar{x} \cdot \vec{u}, \vec{y} - \bar{y} \cdot \vec{u} \rangle$ covariance.

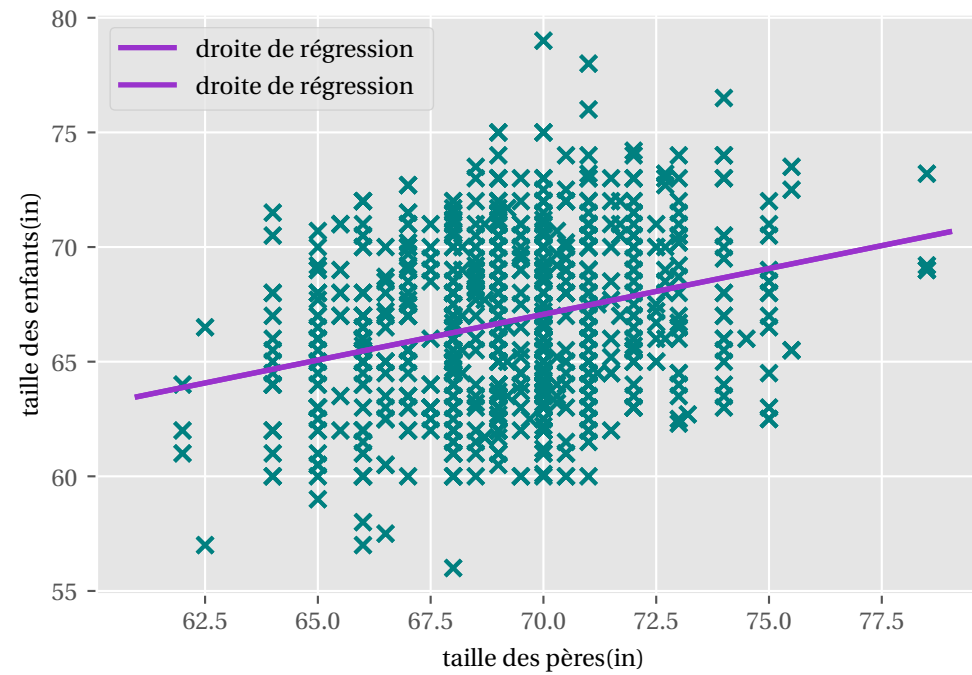
Remarque : On remarque que la droite passe par le point moyen du nuage $(\bar{x}, \bar{y})$.

L'exemple historique de Galton "régression vers la moyenne" Même si la méthode des moindres carrées avait déjà été utilisée par Gauss, Dirichlet... c'est Francis Galton¹ géographe, inventeur, météorologue, écrivain, proto-généticien, psychométricien et statisticien

1. 16 février 1822 – 17 janvier 1911

que l'on crédite de son invention. Il est un des premiers défenseurs de la théorie de l'évolution de son cousin Charles Darwin, il est aussi l'un des fondateurs de l'eugénisme moderne.

Il a utilisé la méthode des moindres carrées pour étudier la relation entre la taille des parents et celle des enfants.



Méthode

Méthode : Transformer une base orthogonale en une base orthonormale

Il faut savoir démontrer le résultat sans trop de calcul.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ **une base orthogonale** de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Pour obtenir une base **orthonormale** de E il suffit de **normaliser** les vecteurs, c'est à dire les rendre de norme 1

$\left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}, \dots, \frac{\vec{e}_p}{\|\vec{e}_p\|} \right)$ est une base orthonormale de E

Méthode : Transformer une base en une base orthogonale

Cette méthode devrait être décomposée en plusieurs étapes dans un sujet.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ **une base quelconque** de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Pour construire une **base orthogonale** de ce même espace.

- On pose $\vec{w}_1 = \vec{e}_1$
- On cherche un réel α tel que $\vec{w}_2 = \vec{e}_2 + \alpha \vec{w}_1$ soit orthogonal à $\vec{w}_1$, en calculant

$$0 = \langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{w}_1 \rangle + \alpha \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle$$

- On cherche des réels α et β tels que $\vec{w}_3 = \vec{e}_3 + \alpha \vec{w}_2 + \beta \vec{w}_1$ soit orthogonal à $\vec{w}_1$ et à $\vec{w}_2$, en calculant des produits scalaires et en utilisant les orthogonalités entre $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$

$$\begin{cases} 0 = \langle \vec{w}_3, \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{w}_1 \rangle + \alpha \langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle + \beta \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle \\ 0 = \langle \vec{w}_3, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{w}_2 \rangle + \alpha \langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle + \beta \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \langle \vec{e}_3, \vec{w}_1 \rangle + 0 + \beta \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle \\ 0 = \langle \vec{e}_3, \vec{w}_2 \rangle + \alpha \langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle + 0 \end{cases}$$

- On cherche des réels α , β et γ tels que $\vec{w}_4 = \vec{e}_4 + \alpha \vec{w}_3 + \beta \vec{w}_2 + \gamma \vec{w}_1$ soit orthogonal à $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$, en calculant des produits scalaires et en utilisant les orthogonalités entre $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$:

Méthode : Diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormale

Cette méthode devrait être décomposée en plusieurs étapes dans un sujet.

Soit A une matrice symétrique réelle, on commence par calculer les valeurs propres et les sous espaces propres.

- Pour les sous espaces propres de dimension 1, il suffit de normaliser les bases
- Pour ceux de dimension 2 ou plus on applique les méthodes précédentes pour trouver une base orthonormale
- On concatène les bases obtenues, en respectant l'ordre choisi pour les valeurs propres, la proposition 12, assure que l'on obtient une base orthonormale de vecteurs propres.

Méthode : Calculer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On cherche à calculer $E^\perp$.

On commence par trouver une base (non forcément orthogonale) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ de E . Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \in E^\perp \Leftrightarrow \langle \vec{e}_1, \vec{u} \rangle = 0 = \langle \vec{e}_2, \vec{u} \rangle = \dots = \langle \vec{e}_p, \vec{u} \rangle$$

En posant $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on obtient un système de p équations à n inconnues.

Méthode : Donner une expression d'une projection

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On construit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une base **orthonormale** de E

$$p_E(\vec{u}) = \sum_{i=1}^p \langle u, \vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i$$

Puis en posant $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$p_E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i$$

Méthode 2 Donner une expression d'une projection

Si $E^\perp$ est plus facile à manipuler que E , on peut calculer $E^\perp$, puis on utilise la proposition 16

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad p_E(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) - p_{E^\perp}(x_1, \dots, x_n)$$