

PRODUIT SCALAIRE

Révisions : Géométrie du plan

Exercice 1 (Différents types d'équation de droite dans le plan).
Le plan étant muni d'un repère orthonormal.

- Donner une équation cartésienne de la droite

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t. \end{cases}$$

- Donner une représentation paramétrique de la droite d'équation $2x - 3y = 4$.

Exercice 2 (Projeté orthogonal d'un point sur une droite).

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$ et $C(1, 4)$.
Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

Exercice 3 (Cercles).

Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Soit $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ et $C(2, 3)$.

- Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
- Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 4 (▲▲ Équation de la tangente).

Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(a, b)$ et de rayon R .
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 5.

Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Donner l'équation du plan passant par $A(1, -\sqrt{2})$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (1, 8)$ et $\vec{v} = (-1, 56)$.

Révisions : Géométrie de l'espace

Exercice 6 (Équation d'un plan donné par deux vecteurs directeurs.).

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1, 0, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Exercice 7 (D'un type d'équation à l'autre).

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- Donner une équation cartésienne du plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{cases}, (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

- Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.

- Donner un système d'équations définissant la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z = 0. \end{cases}$$

Exercice 8 (Équation d'un plan passant par trois points).

On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Parmi les équations cartésiennes ou représentations paramétriques suivantes quelles sont celles qui correspondent à l'unique plan $\mathcal{P}$ passant les trois points $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 4)$ et $C(2, 2, -1)$?

- $3x - 2y + z - 1 = 0$;

$$2. \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3s - 5t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$3. \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 + 2t \\ z = 2s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

- $2x + z - 2 = 0$;

Exercice 9 (Point d'intersection de deux droites).

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 10 (▲ Droites définies par des contraintes).

Trouver les droites passant par le point $A = (2, 3, 1)$, parallèles au plan $P : 2x - 5y + 4z - 1 = 0$ et sécantes à la droite $D : 2x - y + 1 = z = 0$.

Exercice 11 (Projection orthogonale).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les trois points $A(-1, 1, 2)$, $B(0, 0, 1)$ et $C(0, -1, -2)$.

1. Vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Soit M le point de coordonnées $(8, 10, 5)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par M et orthogonale au plan (ABC) .
4. Déterminer les coordonnées du point H , point d'intersection de d et de (ABC) .

Exercice 12 (Projeté orthogonal).

Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(u, v, w)$ sur le plan $\mathcal{P}$ déterminé par les trois points $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 5)$ et $C(2, 3, 4)$.

Exercice 13 ($\blacktriangle$ Perpendiculaire commune).

Déterminer la perpendiculaire commune à $(D1)$ et $(D2)$, puis la distance de $(D1)$ à $(D2)$ lorsque

1. $(D1)$ est la droite donnée par la représentation paramétrique $(x = 3 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t)$ et $(D2)$ est la droite donnée par le système d'équations cartésiennes $(3x + 2y + 4z + 8 = 0, x + y + z = 0)$.
2. $(D1)$ est la droite d'équation $(x + z = 2, y = -1)$ et $(D2)$ est la droite d'équation $(y - z + 1 = 0, x + y = 0)$.

Application du cours

Exercice 14.

On pose $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

1. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
2. soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base.

Exercice 15.

On pose $\vec{e}_1 = (0, 1, -1)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$

1. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$
2. Trouver des réels α, β et γ tels que $(\alpha\vec{e}_1, \beta\vec{e}_2, \gamma\vec{e}_3)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
3. soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans ces deux bases.

Exercice 16 (Orthonormalisation d'une base).

Soit $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$

1. Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Est elle orthonormale? orthogonale?
2. Trouver un réel α tel que $\vec{e}_2 = \vec{u}_2 + \alpha\vec{u}_1$ soit orthogonal à $\vec{u}_1$
3. Trouver des réels β et γ tels que $\vec{e}_3 = \vec{u}_3 + \beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{e}_2$ soit orthogonal à $\vec{e}_2$ et à $\vec{u}_1$.
4. Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, en déduire une base orthonormale.
5. Recommencer ce procédé avec la famille $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$

Utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 17 (Classique).

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels.

1. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 18 ($\blacktriangle$).

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq 2^{n/2} \sqrt{n+1}.$$

2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 19 ($\blacktriangle$).

Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Exercice 20.

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Projection orthogonale et réduction

Exercice 21 (Une projection).

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$

1. Donner une équation et une base de $E^\perp$
2. Donner une expression de p_E
3. Donner une expression de $p_{E^\perp}$.

Exercice 22 (Une projection).

Soit $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, -1, 1)$ deux vecteurs

1. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de $\mathcal{P}^\perp$.

- Donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

Exercice 23 (Une projection).

Soit $\vec{e} = (1, 1, 1)$

- Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{e}$ et passant par O .
- Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de $\mathcal{D}^\perp$.
- Donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

Exercice 24 (Réduction de matrice symétrique).

Diagonaliser dans une bases orthonormale les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 25 (Réduction de matrice symétrique).

Diagonaliser dans une bases orthonormale les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 26 (Réduction de matrice symétrique).

Diagonaliser dans une bases orthonormale la matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel dégénéré).

On se place dans $\mathbb{R}^n$, donner $\{0\}^\perp$ et $\mathbb{R}^{n\perp}$

Exercice 28 ($\blacktriangle$ Propriétés de l'orthogonal).

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

- Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$
- A t'on $(F \cap G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$?

Exercice 29 (Calcul d'orthogonal).

Dans chacun des cas calculer $E^\perp$

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = y - z = 0\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$
- $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$

Exercice 30 ($\blacktriangle$ Orthogonal et base).

- Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ exprimer simplement l'orthogonal de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ où $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$
- Soit E et F deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de E et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r)$ une base orthonormale de F , montrer que $F = E^\perp$ si et seulement si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 31 (sous-espaces vectoriels orthogonaux).

Soit F et G deux sous-espace vectoriel. On dit que F et G sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \vec{u} \in F, \forall \vec{v} \in G \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

- Montrer que si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$
- Montrer que F et $F^\perp$ sont orthogonaux.
- Si F et G sont orthogonaux, et si G et H sont orthogonaux qu'en est-il de F et H .
- Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r)$ une base de G , montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \langle \vec{e}_i, \vec{f}_j \rangle = 0$$

Exercice 32 ($\blacktriangle$ Caractéristiques d'une projection).

Soit p_F la projection orthogonale sur F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. Démontrer les propriétés suivantes

- $p_F \circ p_F = p_F$
- $\text{Ker } p_F = F^\perp$ et $\text{Im } p_F = F$
- $p_F \circ p_{F^\perp} = 0$ et $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.
- On suppose de plus que $F \neq \{0\}$ et $F \neq \mathbb{R}^n$, montrer alors que les valeurs propres de p_F sont 0 et 1 et donner les sous espaces propres associés.

Statistiques

Exercice 33 (Écart-moyen et écart-type).

On appelle écart-moyen de la série statistique $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ le réel

$$e = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Démontrer que l'écart-moyen est toujours inférieur ou égal à l'écart-type σ_x (indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 34 (Droite des moindres carrés).

On considère une série statistique à deux variables $\{(x_i, y_i); 1 \leq i \leq n\}$. On note D_1 la droite de régression de Y par rapport à X et D_2 la droite de régression de X par rapport à Y . Démontrer que $D_1 = D_2$ si et seulement si tous les points (x_i, y_i) sont alignés.

Autres

Exercice 35 (Géométrie du triangle).

Le but de l'exercice est de démontrer que, dans un triangle ABC , les trois bissectrices intérieures sont concourantes et que le point d'intersection est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Pour cela, on considère P le plan munit du produit scalaire usuel, D et D' deux droites distinctes de E , u et v des vecteurs directeurs unitaires de respectivement D et D' . On pose $w_1 = u + v$ et $w_2 = u - v$, D_1 la droite dirigée par w_1 et D_2 la droite dirigée par w_2 .

1. Démontrer que $\langle u, v \rangle \in]-1, 1[$.
2. Démontrer que $D_1 = D_2^\perp$.
3. Soit $x = \alpha u + \beta v$ un vecteur de E . Calculer $d(x, D)^2$ et $d(x, D')^2$ en fonction de α, β, u et v .
4. Démontrer que $d(x, D) = d(x, D') \iff x \in D_1 \cup D_2$.
5. On suppose que x est non nul. Démontrer que $x \in D_1$ si et seulement si $\cos(\widehat{(u, x)}) = \cos(\widehat{(v, x)})$.
6. En déduire le résultat annoncé au début de l'exercice.

Problèmes

Exercice 36 (D'après M. Bacquelin).

Soit a un réel et M_a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Réduction de la matrice M_a**
 - (a) La matrice M_a est-elle diagonalisable?
 - (b) Selon les valeurs de a , donner l'ensemble des valeurs propres de M_a ainsi qu'une bases chaque sous-espace propre.
 - (c) Trouver une matrice P , inversible et une matrice diagonale D_a dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_a = P D_a P^T$.
 - (d) Pour tout entier naturel n , exprimer la matrice M_a^n .
2. **Quelques considérations particulières.**
 - (a) On suppose $a = -2$. Donner le plus grand entier naturel n pour lequel la famille $(I_3, M_a, \dots, M_a^n)$ est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) On suppose $a = 2$ Montrer que $\frac{1}{2} M_a$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur E_2 .

Exercice 37 (D'après M. Bacquelin).

1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1; 0; 0)$, $\vec{v} = \sqrt{2}(0; 1; 0)$, $\vec{w} = \sqrt{2}(0; 0; 1)$ et $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :

$$y - z = 0.$$

Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sur le plan $\mathcal{P}$ et vérifier qu'ils ont même norme.

2. Soit $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls. On suppose qu'il existe un plan $\mathcal{Q}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1 \vec{e}_1, a_2 \vec{e}_2$ et $a_3 \vec{e}_3$ sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d .

On considère $(\vec{\varepsilon}_1; \vec{\varepsilon}_2)$ une base orthonormée de $P_{\text{et}} \vec{\varepsilon}_3$ vecteur normal à $\mathcal{Q}$ de norme 1. On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{Q}$.

- (a) Donner une expression de $p(\vec{e}_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$.
- (b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\langle \vec{e}_i, \vec{\varepsilon}_1 \rangle^2 + \langle \vec{e}_i, \vec{\varepsilon}_2 \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i} \right)^2$$

- (c) Montrer que : $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}$.

- (d) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geq d$ puis que :

$$a_i^2 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a_k^2} \geq 2$$