

DM 16 sujet oral

Bio Spé

à rendre le 16 mars 2026

Question de cours

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.

Exercice préparé

Soit n un entier naturel non-nul.

On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3 .

Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobabilité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.
2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$. Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?
3. Dans cette question, $n = 2$.
 - (a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.
 - (b) Donner la loi de X , puis celle de Y .
 - (c) Calculer la covariance du couple (X, Y) .
4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.

- (a) Déterminer la loi de X , et donner la valeur de son espérance.
- (b) En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $E(Y)$.
- (c) Démontrer que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = j \cap Y_i = 1) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

- (d) Calculer alors $E(XY_i)$ pour $i \in \{2, 3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?
- (e) Calculer la covariance du couple (X, Y) .