

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Exercice

1. La fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} car la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc $f(x) > 0$.

On remarque que f est aussi paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est de même nature de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Or cette dernière est impropre uniquement en $+\infty$ car f est continue sur $[0; +\infty[$. Soit $A > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)dx &= \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_0^A \\ &= \frac{1}{\pi} (\arctan(A) - \arctan(0)) \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{lorsque } A \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

On en déduit (propriété de cours) que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

En conclusion, f est une densité de probabilité.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A \in [1; +\infty[$:

$$\int_1^A \frac{1}{x}dx = \ln(A) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } A \rightarrow +\infty.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est divergente.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A \in [1; +\infty[$:

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{A} \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } A \rightarrow +\infty.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$.

3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est doublement impropre, en $+\infty$ et $-\infty$.

De plus, $xf(x) = \frac{x}{\pi(1+x^2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$ et $xf(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, donc d'après le critère d'équivalence pour les intégrales

de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi x}dx$.

Or on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est divergente, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi x}dx$ est divergente et par conséquent $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ est divergente.

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ n'est pas convergente et donc que X n'admet pas d'espérance.

Comme X n'admet pas d'espérance, X n'admet pas de variance.

4. (a) Comme X est une VAR à densité on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow -\infty} [\arctan(t)]_A^x \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow -\infty} (\arctan(x) - \arctan(A)) \\ &= \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$.

- (b) D'après nos connaissances sur les fonctions usuelles la fonction F est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Donc, d'après le théorème de bijection monotone, F réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0; 1[$.

Pour tout $y \in]0; 1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow y = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \pi \left(y - \frac{1}{2} \right) = \arctan(x) \\ &\Leftrightarrow x = \tan \left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Donc, $\forall y \in]0; 1[, F^{-1}(y) = \tan \left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right)$.

5. (a) Notons F_Y la fonction de répartition de Y . Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(x)) && \text{car } F \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F(x) && \text{car } F(x) \in]0; 1[\text{ et pour } t \in]0; 1[, \mathbb{P}(U \leq t) = t. \end{aligned}$$

Y et X ont la même fonction de répartition donc Y et X suivent la même loi.

- (b) def cauchy() :

```
U = rd.random()
X = np.tan(np.pi*(U-1/2))
return X
```

6. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z .

Pour tout $x < 0$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = 0$ car l'événement $[Z \leq x]$ est impossible.

Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x^2) && \text{fonction carrée strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &= \mathbb{P}(-x^2 \leq X \leq x^2) && \text{propriété de la valeur absolue} \\ &= F(x^2) - F(-x^2) \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan(x^2). \end{aligned}$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan(x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La fonction $x \mapsto 0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$ et la fonction $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(x^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$. Donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

F est donc aussi continue sur \mathbb{R}^* . De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$, donc F est continue sur \mathbb{R} .

Par caractérisation des variables à densité, Z est donc une variable à densité.

On sait qu'une densité de Z vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_Z(x) = F'_Z(x)$. On complète arbitrairement en 0 par une valeur

positive et on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{\pi(1+x^4)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

7. Sous réserve de convergence

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{\pi(1+x^4)} dx.$$

Cette dernière intégrale est impropre uniquement en $+\infty$. De plus, $\frac{4x^2}{\pi(1+x^4)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\pi x^2}$.

Or, on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente donc $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi x^2} dx$ est convergente.

Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{\pi(1+x^4)} dx$ est convergente.

X admet donc une espérance.

Sous réserve de convergence

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\pi(1+x^4)} dx.$$

Cette dernière intégrale est impropre uniquement en $+\infty$.

De plus, $\frac{4x^3}{\pi(1+x^4)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\pi x}$.

On a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente donc, par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\pi(1+x^4)} dx$ est divergente.

Z n'admet pas de moment d'ordre 2 donc n'admet pas de variance.

8. (a) On peut remarquer que le choix de $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ fonctionne.

(b) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ sont continues sur $[0; +\infty[$ car le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif) et à valeurs strictement positives.

Les deux intégrales proposées sont donc impropres en $+\infty$.

De plus, $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

Or, on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente.

Donc, par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives,

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$ sont convergentes.

On pose $u = \sqrt{2}x + 1$. La fonction $x \mapsto \sqrt{2}x + 1$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de changement de variable généralisé,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A) - \arctan(1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

On a bien $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(c) On peut remarquer que $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

On a donc

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left[\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A^2 - \sqrt{2}A + 1) - \ln(A^2 + \sqrt{2}A + 1) + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left[\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{A^2 - \sqrt{2}A + 1}{A^2 + \sqrt{2}A + 1} \right) + 2\pi \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} [0 + 2\pi] \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On a bien $E(Z) = \sqrt{2}$.

9. (a) La fonction **mystere** renvoie la fréquence d'apparition de l'événement $\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \sqrt{2} \right| \leq \varepsilon \right]$ sur 1000 réalisations.

Il s'agit donc d'une valeur approchée de la probabilité $P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \sqrt{2} \right| \leq \varepsilon \right)$.

(b) Il semble que pour tout $\varepsilon > 0$ (chaque ligne) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \sqrt{2} \right| \leq \varepsilon \right) = 1$.

Problème

Partie I : Quelques résultats utiles

1. On sait que la série $\sum \frac{t^k}{k!}$ (série exponentielle) est convergente pour tout réel t . Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x\lambda \in \mathbb{R}$ et donc la série $\sum \frac{\lambda^k x^k}{k!}$ est convergente. Par multiplication par le réel $e^{-\lambda}$, $\sum \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}$ est convergente. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda(x-1)}. \end{aligned}$$

$S(x)$ existe pour tout réel x et $S(x) = e^{\lambda(x-1)}$.

2. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = (1-x)e^{-x}.$$

La fonction g est donc croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$

De plus, $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) < 0$.

3. On pose $\phi : x \mapsto f(x) - x$. ϕ est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1], \quad \phi'(x) &= \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 \\ \phi''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda(x-1)}. \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	0	1
$\phi''(x)$	+	
$\phi'(x)$	$\lambda e^{-\lambda} - 1$	$\lambda - 1$
$\phi'(x)$	-	
$\phi(x)$	$e^{-\lambda}$	0

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a donc $\phi''(x) > 0$. ϕ' est donc strictement croissante sur $[0; 1]$. De plus, $\phi'(1) = \lambda - 1 \leq 0$ (car $\lambda \leq 1$), donc pour tout $x \in [0; 1]$, $\phi'(x) \leq 0$ et ϕ' n'est pas la fonction nulle (car strictement croissante). Donc ϕ est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

ϕ étant aussi continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème de bijection monotone, ϕ réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[\phi(1); \phi(0)] = [0; e^{-\lambda}]$.

Comme $0 \in [0; e^{-\lambda}]$, l'équation $\phi(x) = 0$ admet donc une unique solution qui est $x = 1$. Or $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Pour $\lambda \leq 1$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, $x = 1$.

4. On suppose ici $\lambda > 1$. Les variations de ϕ' de la question précédente sont encore valable mais cette fois $\phi'(1) > 0$ et $\phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 \leq 0$ (d'après la question précédente).

ϕ' étant continue et strictement croissante, de même que dans la question précédente on montre que ϕ' s'annule une unique fois sur $[0; 1]$. (On peut en fait déterminer la valeur de $\alpha = 1 - \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda)$).

On a alors le tableau suivant :

x	0	α	1
$\phi'(x)$		0	
$\phi(x)$	$e^{-\lambda}$	$\phi(\alpha)$	0

ϕ est strictement décroissante sur $[0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; 1]$.

ϕ étant toujours continue sur $[0; 1]$, ϕ réalise une bijection de $[0; \alpha]$ sur $[\phi(\alpha); \phi(0)]$ et une bijection de $[\alpha; 1]$ sur $[\phi(\alpha); \phi(1)]$.

Comme $\phi(1) = 0$, l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\alpha; 1]$ qui est $x = 1$.

Comme $\phi(\alpha) < \phi(1) = 0$ et $\phi(0) = e^{-\lambda} > 0$, $0 \in [\phi(\alpha); \phi(0)]$ donc l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_λ , sur $[0; \alpha]$.

On a toujours $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Pour $\lambda > 1$, l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions, x_λ et 1.

5. D'après notre cours $E(T_1) = t_1$ et $V(T_1) = t_1$.

6. (a) Comme T_1 et T_2 sont à valeurs dans \mathbb{N} , on a $\forall i \in \mathbb{N}, [S = i] = \bigcup_{j=0}^i [T_1 = j] \cap [T_2 = i - j]$.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S = i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^i [T_1 = j] \cap [T_2 = i - j]\right) \\
 &= \sum_{j=0}^i \mathbb{P}([T_1 = j] \cap [T_2 = i - j]) && \text{union d'évt disjoints} \\
 &= \sum_{j=0}^i \mathbb{P}(T_1 = j) \times \mathbb{P}(T_2 = i - j) && T_1 \text{ et } T_2 \text{ indépendantes} \\
 &= \sum_{j=0}^i e^{-t_1} \frac{t_1^j}{j!} \times e^{-t_2} \frac{(t_2)^{i-j}}{(i-j)!} \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} t_1^j t_2^{i-j} \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{i!} (t_1 + t_2)^i && \text{formule du binôme de Newton.}
 \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T_1 + T_2 = i) = e^{-(t_1+t_2)} \frac{(t_1 + t_2)^i}{i!}$.

(c) $T_1 + T_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$.

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k \gg$.

— Comme $S_1 = T_1$ et que T_1 suit une loi de Poisson de paramètre t_1 , $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$ et S_n suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$ et T_{n+1} une loi de Poisson de paramètre t_{n+1} .

De plus, d'après le lemme des coalitions S_n et T_{n+1} sont indépendantes.

Donc, d'après la question 6., $S_n + T_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k + t_{n+1}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \sum_{k=1}^n t_k.$$

8. D'après notre cours $\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ t \mapsto K e^{A(t)}, K \in \mathbb{R} \right\}$ où A est une primitive de a sur I .

9. Supposons que f est une solution de (E_1) qui s'annule en un réel $t_0 \in I$.

D'après la question précédente, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f(t) = K e^{A(t)}$. On a alors $f(t_0) = 0 \Leftrightarrow K = 0$.
Et donc, $f = 0$.

Donc, si f est une solution de (E_1) s'annulant sur I alors f est la fonction nulle sur I .

10. La fonction $g - C$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} (g - C)'(t) &= g'(t) \\ &= b(g(t))[g(t) - C] && \text{car } g \text{ est solution de } (E_2) \\ &= b(g(t))(g - C)(t). \end{aligned}$$

Donc $g - C$ est solution de (E_3) .

11. Supposons qu'il existe t_0 tel que $g(t_0) = C$.

Alors $g - C$ est une solution de (E_3) qui s'annule sur I . L'équation (E_3) étant de la forme des équations du type (E_1) , d'après la question 9., on peut affirmer que $g - C$ est la fonction nulle et donc que g est constante sur I .

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$ alors g est constante sur I .

Partie II : Probabilité d'extinction d'une stratégie

12. $p_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$ car Z_0 est constante à 1.

$$p_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \text{ car } Z_1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda.$$

$p_2 = \mathbb{P}(Z_2 = 0)$. $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k\lambda} \frac{(k\lambda)^0}{0!}, \end{aligned}$$

car, sachant $[Z_1 = k]$ réalisé, Z_2 est la somme de k VAR indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ donc la loi conditionnelle de Z_2 sachant $[Z_1 = k]$ est une loi de Poisson de paramètre $k\lambda$ d'après la question 7.

On a donc $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = S(e^{-\lambda}) = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)}$.

$$p_0 = 0, p_1 = e^{-\lambda}, p_2 = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)}.$$

13. Si l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé alors Z_{n+1} est la somme de 0 VAR suivant des lois de Poisson donc $[Z_{n+1} = 0]$ est forcément réalisé.

Ainsi, $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ et donc, par propriété des probabilités, $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$, c'est-à-dire $p_n \leq p_{n+1}$.

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 1 (car c'est une suite de probabilités), donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge.

14. $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} p_n^k \\ &= S(p_n). \end{aligned}$$

On a bien $p_{n+1} = S(p_n)$.

15. Notons β la limite de la suite (p_n) (qui existe d'après la question 13.).

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = \beta$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(p_n) = S(\beta)$ car S est continue sur \mathbb{R} .

Par unicité de la limite on a donc $\beta = S(\beta)$. Or, d'après la question 1., S coïncide avec la fonction f des questions 3. et 4. et donc β est une solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question 3., si $\lambda \leq 1$, $\beta = 1$ et d'après la question 4., si $\lambda > 1$, $\beta = 1$ ou $\beta = x_\lambda$.

Dans le cas où $\lambda > 1$, comme S (ou f) est croissante et que $p_0 = 0$, on peut montrer par une récurrence rapide que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq x_\lambda$. Donc si $\lambda > 1$, $\beta = x_\lambda$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \leq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.}$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = x_\lambda.}$$

16. Si $\lambda \leq 1$, il est presque certain que la population d'individus suivant la stratégie étudiée s'éteint.

Comme λ représente le nombre moyen d'enfants de chaque individu, ce résultat est cohérent.

Partie III : Étude de deux exemples

17.

(C_1, C_2, C_3) solution constante de (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1(C_2 - C_3) \\ 0 = C_2(C_3 - C_1) \\ 0 = C_3(C_1 - C_2) \\ 1 = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \text{ ou } C_2 = C_3 \\ C_2 = 0 \text{ ou } C_1 = C_3 \\ C_3 = 0 \text{ ou } C_1 = C_2 \\ 1 = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} C_1 = 1/3 \\ C_2 = 1/3 \\ C_3 = 1/3 \end{cases}$$

Parmi les 8 systèmes issus des « ou », seuls ces 4 là sont compatibles et offrent une solution.

$$\boxed{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \text{ et } (1/3, 1/3, 1/3) \text{ sont les 4 triplets solutions constante de (2).}$$

18. On sait que λ est une valeur propre de M si, et seulement si $\text{rg}(M - \lambda I_3) < 3$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & -1 - \lambda^2 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -2 & \lambda^2 - \lambda + 2 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 - \lambda^2 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -2 & \lambda^2 - \lambda + 2 \\ 0 & 0 & -3\lambda - \lambda^3 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow 2L_3 + (1 - \lambda)L_2 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(M) &\iff -3\lambda - \lambda^3 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + 3 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = i\sqrt{3} \text{ ou } \lambda = -i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Donc $\text{sp}(M) = \{0; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$.

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On a alors $MX = 0 \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z$. Donc $E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a aussi $MX = i\sqrt{3}X \iff \begin{cases} y - z = i\sqrt{3}x \\ -x + z = i\sqrt{3}y \\ x - y = i\sqrt{3}z \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} y = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x \\ z = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$.

Donc $E_{i\sqrt{3}}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)$.

De même, $E_{-i\sqrt{3}}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)$.

19. M admet trois valeurs propres distinctes et est une matrice de taille 3, donc M est diagonalisable.

D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de M .

Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ on a nécessairement $M = PDP^{-1}$.

20. On a tout d'abord,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3/4; 1\}, & \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3/4; 1\}, & \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{A(x-1)(4x-3) + Bx(4x-3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(4x-3)} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3/4; 1\}, & \quad 1 = 3A + (-7A - 3B - C)x + (4A + 4B + C)x^2\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir A, B, C tels que

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 7A + 3B + C = 0 \\ 4A + 4B + C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 1 \\ C = -16/3 \end{cases}$$

En prenant $A = \frac{1}{3}, B = 1$ et $C = -\frac{16}{3}$, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3/4; 1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3}.$$

21. Les primitives de h sur $]0; 3/4[$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} H(x) &= A \ln(|x|) + B \ln(|x-1|) + \frac{C}{4} \ln(|4x-3|) + K && \text{avec } K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} \ln(x) + \ln(1-x) - \frac{4}{3} \ln(3-4x) + K \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x(1-x)^3}{(3-4x)^4} \right) + K. \end{aligned}$$

L'ensemble des primitives de h sur $]0; 3/4[$ est $\left\{ x \mapsto \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x(1-x)^3}{(3-4x)^4} \right) + K, K \in \mathbb{R} \right\}$.

22. On suppose donc que $x_1(0) \in]0; 3/4[$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $x_1(\alpha) \geq \frac{3}{4}$. Alors, comme x_1 est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $x_1(t_0) = \frac{3}{4}$.

Reprenons les notation des questions 10. et 11.

La fonction b est définie par $b(u) = 4u(u-1)$ et $C = \frac{3}{4}$ et g est la fonction x_1 .

D'après la question 11. s'il existe t_0 tel que $x_1(t_0) = \frac{3}{4}$ alors x_1 est constante égale à $\frac{3}{4}$ ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse $x_1(0) \in]0; 3/4[$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x_1(t) < \frac{3}{4}$.

De la même manière, on peut montrer que $x_1(t) > 0$.

Donc, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, x_1(t) \in]0; 3/4[}$.

23. On a :

$$\begin{aligned} &x_1 \text{ est solution de (4) sur } \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1'(t) &= x_1(t)(x_1(t)-1)(4x_1(t)-3) \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1'(t)h(x_1(t)) &= 1 && \text{car } x_1(t)(x_1(t)-1)(4x_1(t)-3) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \exists D \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(3/4-x_1(t))^4} \right) &= t + D && \text{question 21.} \\ \Leftrightarrow \exists D \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4} \right) &= t + D && \text{car } (x_1(t)-3/4)^4 = (3/4-x_1(t))^4 \end{aligned}$$

$\exists D \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4} \right) = t + D.$

24. On a vu que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x_1(t) \in]0; 3/4[$, donc

$$x_1'(t) = x_1(t)(x_1(t)-1)(4x_1(t)-3) \geq 0.$$

La fonction x_1 est donc croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie $\ell \in [x_1(0); 3/4] \subset]0; 3/4[$.

Supposons que $\ell \neq \frac{3}{4}$. Alors on a, par opération sur les limites,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\ell(1-\ell)^3}{(\ell-3/4)^4} \right) \in \mathbb{R},$$

car $\frac{\ell(1-\ell)^3}{(\ell-3/4)^4} > 0$.

Mais on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t + D = +\infty.$$

Ceci est absurde. Donc $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \frac{3}{4}}$.