

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5
SUJET TYPE ENS
Durée de l'épreuve : 4h

La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés à l'aide d'une règle.

Une marche aléatoire est une suite de variables aléatoires obtenues en sommant des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

Dans la première partie, nous étudions une marche aléatoire simple et exhibons un lien entre l'évolution temporelle de sa loi, et une certaine équation aux dérivées partielles.

Cela motive l'étude, dans la deuxième partie, d'une équation aux dérivées partielles un peu plus générale, avec cette fois des conditions au bord, censées modéliser l'absorption de la marche aléatoire.

Enfin, dans les troisième et quatrième parties, nous revenons au discret en nous intéressant cette fois à une matrice, et à ses valeurs propres et vecteurs propres.

Les trois premières parties sont indépendantes. Les parties II et III ne font aucune référence à des marches aléatoires ou à des probabilités.

Notations et rappels

On utilise les notations habituelles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , mais aussi \mathbb{N}^* , \mathbb{Z}^* , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_+^* . Par exemple, \mathbb{Z}^* désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls, et \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Pour $m \leq n$ entiers naturels, on note $\llbracket m; n \rrbracket = \{m, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers naturels compris dans l'intervalle $[m; n]$. Pour x réels, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, définie comme étant l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M carrées de taille n à coefficients réels. On dit qu'une suite $(M^{(k)})_{k \geq 1}$ de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, la suite des coefficients $(M_{i,j}^{(k)})_{k \geq 1}$ converge vers le coefficient $M_{i,j}$.

On rappelle qu'une application f de E dans \mathbb{R} est nulle si pour tout x dans E , on a $f(x) = 0$, et non nulle s'il existe x dans E tel que $f(x) \neq 0$.

Enfin, toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on rappelle que si U et V sont des variables aléatoires à densités indépendantes, dont des densités respectives sont f_U et f_V , alors $W = U + V$ est une variable à densité dont une densité de probabilité est la fonction f_W définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = (f_U \star f_V)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

Le théorème centrale limite

On admet le théorème suivant qui sera utilisé dans la partie I.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé et indépendantes.

On suppose que les X_n suivent toutes la même loi et qu'elles admettent une variance non nulle.

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Préliminaire

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) . Déterminer la loi de $Y = aX + b$ où a et b sont deux réels fixés.

On distinguera les cas $a > 0$, $a < 0$ et $a = 0$.

2. Le but de cette question est de prouver un résultat du cours.

- (a) Dans cette question X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

On note f_X et f_Y les densités respectives de X et Y .

- i. Montrer que pour tous réels x , et t

$$\frac{t^2}{\sigma^2} + (x-t)^2 = \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1+\sigma^2} \right)^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2}.$$

ii. En utilisant la formule pour $f_X \star f_Y$ et le changement de variable $u = \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\sigma^2}} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1+\sigma^2} \right)$ montrer que pour x réel

$$f_X \star f_Y(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2} \right)\right) du$$

iii. En déduire que $X + Y$ suit une loi normale dont on précisera l'espérance et la variance.

(b) On revient au cas général X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, on suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

i. En utilisant les résultats précédents donner la loi de $\frac{X - \mu_1 + Y - \mu_2}{\sigma_1}$.

ii. En déduire la loi de $X + Y$.

Partie I

On considère $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{-1; 1\}$, et telles que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note également $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire associée, définie par $S_0 = 0$, et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$u_{n,k} = \mathbb{P}(S_n = k).$$

3. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que les variables $\frac{1+X_1}{2}, \dots, \frac{1+X_n}{2}$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

En déduire que la variable aléatoire $\frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

(b) Pour $n \geq 0$, on note

$$A_n := \left\{ k \in \mathbb{Z} ; \frac{n+k}{2} \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$u_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n} & \text{si } k \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(c) Montrer que la suite à double indices $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$ vérifie $u_{0,0} = 1$ ainsi que $u_{0,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad u_{n+1,k} = \frac{u_{n,k-1} + u_{n,k+1}}{2}.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction F_n de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F_n(x, t) = \sum_{k \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor} u_{\lfloor nt \rfloor, k},$$

et on s'intéresse au comportement de cette fonction lorsque n tend vers l'infini.

(a) Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

(b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

(c) On admet que dans la question précédente on peut remplacer x par une suite (x_n) qui tend vers x , et encore obtenir

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Montrer que pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $F_n(x, t)$ tend vers $F(x, t)$ quand n tend vers l'infini, où F est la fonction définie par

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

5. Montrer que, pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire $F(x, t) = \int_{-\infty}^x f(y, t) dy$, où f est la fonction définie par

$$f(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$

6. Montrer que f vérifie, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(y, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t).$$

Partie II

Dans cette partie, on fixe $m \in \mathbb{R}$, et on s'intéresse aux fonctions u de $[0; 1] \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^2 , et solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = m \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (1)$$

avec les conditions au bord

$$\forall t \geq 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (2)$$

On cherche les solutions u non nulles qui peuvent se décomposer en un produit de deux fonctions d'une seule variable.

Soient donc $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que la fonction $u : [0; 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x, t) = f(x)g(t)$ est non nulle et solution de (1) et (2).

7. Vérifier que les fonctions f et g sont alors non nulles.

8. Montrer qu'il existe un réel λ tel que la fonction g vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = \lambda g(t),$$

puis résoudre cette équation différentielle.

9. Montrer que pour cette même valeur de λ , la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{1}{2} f''(x) + m f'(x) = \lambda f(x),$$

avec conditions au bord $f(0) = f(1) = 0$.

10. On suppose dans cette question $\lambda > -\frac{m^2}{2}$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = a e^{r_+ x} + b e^{r_- x},$$

pour des réels r_+ et r_- que l'on précisera.

(b) Montrer que a et b sont nécessairement nuls, et obtenir une contradiction.

11. En procédant comme dans la question précédente, obtenir une contradiction si l'on suppose $\lambda = -\frac{m^2}{2}$.

12. On suppose dans cette question $\lambda < -\frac{m^2}{2}$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = (a \cos(\pi l x) + b \sin(\pi l x)) e^{-m x},$$

où $l = \frac{1}{\pi} \sqrt{-2\lambda - m^2}$.

(b) Montrer que l'on a nécessairement $a = 0$, $b \neq 0$, et $l \in \mathbb{N}^*$.

13. Déterminer tous les couples (f, g) de fonctions \mathcal{C}^2 tels que la fonction $u : (x, t) \mapsto u(x, t) = f(x)g(t)$ soit non nulle et solution de (1) et (2).

Partie III

Dans cette partie, on se fixe n un entier supérieur ou égal à 2, et a, b et c des réels strictement positifs.

On s'intéresse à la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } j = i \\ b & \text{si } j = i - 1 \\ c & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \notin \{i - 1, i, i + 1\} \end{cases}.$$

14. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. On a alors $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de M .

15. Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $X^{(l,r)} = \begin{pmatrix} X_1^{(l,r)} \\ \vdots \\ X_n^{(l,r)} \end{pmatrix}$ le vecteur défini par

$$X_i^{(l,r)} = r^i \sin\left(\frac{il\pi}{1+n}\right),$$

et $Y^{(l,r)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(l,r)} \\ \vdots \\ Y_n^{(l,r)} \end{pmatrix}$ le vecteur défini par

$$Y_i^{(l,r)} = r^i \cos\left(\frac{il\pi}{1+n}\right).$$

Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'on a :

$$MX^{(l,r)} = \left(a + \left(cr + \frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)\right) X^{(l,r)} + \left(cr - \frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) Y^{(l,r)}.$$

En déduire que pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur $X^{(l, \sqrt{b/c})}$ est un vecteur propre, et déterminer la valeur propre associée. On note $X^{(l)} = X^{(l, \sqrt{b/c})}$ ce vecteur propre, et $\lambda^{(l)}$ la valeur propre associée.

16. Soient $m \geq 1$ et $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$ des vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ supposées distinctes et ordonnées par ordre décroissant : $\lambda_1 > \dots > \lambda_m$.

(a) Sous l'hypothèse supplémentaire $\lambda_m > 0$, montrer que la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est libre. On pourra considérer, pour Z combinaison linéaire de ces vecteurs, le comportement de $A^k Z$ lorsque k tend vers l'infini.

(b) Montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse $\lambda_m > 0$.

(c) En déduire que les vecteurs $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

17. Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E^{(l)} = \begin{pmatrix} E_1^{(l)} \\ \vdots \\ E_n^{(l)} \end{pmatrix}$ le vecteur défini par

$$E_i^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

de sorte que $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$ soit la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $(\alpha_{i,l})_{1 \leq i \leq n}$ les coefficients de $E^{(l)}$ dans la base $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$.

Montrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{(\lambda^{(1)})^k} M^k\right)_{k \geq 1}$ converge vers la matrice $N = (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$N_{i,j} = \alpha_{1,j} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{i}{2}} \sin\left(\frac{i\pi}{1+n}\right).$$

18. Montrer que les coefficients $N_{i,j}$ sont tous strictement positifs.

Partie IV

Dans cette partie, on se fixe n un entier supérieur ou égal à 2, et a, b et c des réels strictement positifs et de somme 1. On s'intéresse à la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+2}$ de $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ définie par

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i = 1 \text{ ou } j = i = n + 2 \\ a & \text{si } j = i \text{ et } j \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket \\ b & \text{si } j = i - 1 \text{ et } j \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket \\ c & \text{si } j = i + 1 \text{ et } j \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de M , et expliquer les liens que l'on peut voir entre cette matrice et les trois premières parties.