

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 (ENS)

Préliminaire

1. On sait que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

Supposons $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(aX + b \leq x) \\ &= P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) && \text{car } a > 0 \\ &= \int_{-\infty}^{(x-b)/a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-b-am)^2}{2a^2\sigma^2}\right) du && u = at + b \text{ changement de var strict croiss et } \mathcal{C}^1 \end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi normale de paramètres $(am + b, a^2\sigma^2)$.

Supposons $a < 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(aX + b \leq x) \\ &= P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) && \text{car } a > 0 \\ &= \int_{(x-b)/a}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \int_x^{-\infty} \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-b-am)^2}{2a^2\sigma^2}\right) du && u = at + b \text{ changement de var strict décroiss et } \mathcal{C}^1 \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-b-am)^2}{2a^2\sigma^2}\right) du \end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi normale de paramètres $(am + b, a^2\sigma^2)$.

Lorsque $a = 0$, Y est la loi certaine égale à b .

Si $a \neq 0$, Y suit la loi normale de paramètres $(am + b, a^2\sigma^2)$ et si $a = 0$, Y est la loi certaine égale à b .

2. (a) i. Soient x et t deux réels. On a

$$\begin{aligned} \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2} &= \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \left(t^2 - 2\frac{tx\sigma^2}{1+\sigma^2} + \frac{x^2\sigma^4}{(1+\sigma^2)^2}\right) + \frac{x^2}{1+\sigma^2} \\ &= \frac{t^2}{\sigma^2} + t^2 - 2xt + \frac{x^2\sigma^2}{1+\sigma^2} + \frac{x^2}{1+\sigma^2} \\ &= \frac{t^2}{\sigma^2} + t^2 - 2xt + x^2 \\ &= \frac{t^2}{\sigma^2} + (x-t)^2. \end{aligned}$$

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{t^2}{\sigma^2} + (x-t)^2 = \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2}.$$

ii. Le changement de variable proposé est affine donc \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et de plus strictement croissant car $\sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\sigma^2}} > 0$.

D'après la formule du produit de convolution, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_X * f_Y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-t)^2/2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2} + (x-t)^2\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2}\right)\right) \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}} du \quad \text{changement de var et question précédente} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2}\right)\right) du. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_X * f_Y(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{x^2}{1+\sigma^2}\right)\right) du.$

iii. X et Y sont deux VAR à densité indépendantes donc $X+Y$ est une VAR à densité dont une densité est $f_X * f_Y$. On poursuit donc le calcul précédent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X * f_Y(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+\sigma^2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+\sigma^2)2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+\sigma^2)}\right). \end{aligned}$$

$X+Y$ suit la loi normale de paramètres $(0, 1+\sigma^2)$.

(b) i. D'après la question 1. $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\frac{Y-\mu_2}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$.

X et Y étant indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}$ et $\frac{Y-\mu_2}{\sigma_1}$ sont indépendantes.

Donc, d'après la question 2.a), on peut affirmer que $\frac{X-\mu_1+Y-\mu_2}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$.

ii. On remarque alors que $X+Y = \sigma_1 \left(\frac{X-\mu_1+Y-\mu_2}{\sigma_1}\right) + \mu_1 + \mu_2$.

Donc, d'après la question précédente et la question 1., $X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Partie I

3. (a) Les variables (X_1, \dots, X_n) sont supposées indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions,

les variables $\frac{1+X_1}{2}, \dots, \frac{1+X_n}{2}$ sont indépendantes.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\left(\frac{1+X_i}{2}\right)(\Omega) = \{0; 1\}$ et

$$\mathbb{P}\left(\frac{1+X_i}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(1+X_i = 2) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

$\frac{1+X_i}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On remarque que $\frac{1}{2}(S_n + n) = \sum_{i=1}^n \frac{1+X_i}{2}$.

On vient de montrer que les variables $\frac{1+X_i}{2}$ sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

D'après notre cours (première année), $\frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 u_{n,k} &= \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{2}(S_n + n) = \frac{n+k}{2}\right) \\
 &= \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+k)/2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-(n+k)/2} & \text{si } \frac{n+k}{2} \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{question précédente} \\
 &= \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n} & \text{si } k \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$u_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n} & \text{si } k \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) On a $0 \in A_0$ donc $u_{0,0} = \binom{0}{0} 2^0 = 1$.

Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $k \notin A_0$ donc $u_{0,k} = 0$.

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1,k} &= \mathbb{P}(S_{n+1} = k) \\
 &= \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = k) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)P_{[X_{n+1}=-1]}(S_n + X_{n+1} = k) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)P_{[X_{n+1}=1]}(S_n + X_{n+1} = k) \\
 &\quad \text{FPT avec le SCE } ([X_{n+1} = -1], [X_{n+1} = 1]) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n = k+1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n = k-1) \\
 &= \frac{u_{n,k+1} + u_{n,k-1}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$u_{0,0} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}^*, u_{0,k} = 0, \forall (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, u_{n+1,k} = \frac{u_{n,k+1} + u_{n,k-1}}{2}.$$

4. (a) Comme $\frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, on a $E\left(\frac{1}{2}(S_n + n)\right) = \frac{n}{2}$. Donc, par linéarité de l'espérance $E(S_n) = 0$.

De plus, $V\left(\frac{1}{2}(S_n + n)\right) = \frac{n}{4}$, donc par propriété de la variance $V(S_n) = n$.

$$E(S_n) = 0 \text{ et } V(S_n) = n.$$

(b) Les variables $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes, de même loi et de variance non nulle (ce ne sont pas des VAR constantes). D'après le théorème central limite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(M_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\text{avec } M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}} \text{ et } M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

On remarque que $M_n = \frac{1}{n} S_n$. Donc $E(M_n) = 0$ et $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$.

$$\text{Donc } M_n^* = \frac{S_n/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{On a donc bien } \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

(c) Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x, t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor} u_{\lfloor nt \rfloor, k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor} \mathbb{P}(S_{\lfloor nt \rfloor} = k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor} [S_{\lfloor nt \rfloor} = k] \right) && \text{union d'evt disjoints} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_{\lfloor nt \rfloor} \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \leq \frac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \right). \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} = \frac{x}{\sqrt{t}}$ car

$$\frac{x\sqrt{n} - 1}{\sqrt{nt}} \leq \frac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \leq \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{nt - 1}},$$

et on montre facilement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{n} - 1}{\sqrt{nt}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{nt - 1}} = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

Donc, d'après le résultat admis on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \leq \frac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du = F(x, t).$$

5. Dans l'intégrale définissant $F(x, t)$ on effectue le changement de variable $y = \sqrt{t}u$. La fonction $u \mapsto \sqrt{t}u$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur $\left] -\infty; \frac{x}{\sqrt{t}} \right]$, donc d'après le théorème de changement de variable généralisé :

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad F(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y/\sqrt{t})^2}{2}} \times \frac{dy}{\sqrt{t}} \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy. \end{aligned}$$

On a bien $F(x, t) = \int_{-\infty}^x f(y, t) dy$ avec $f(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$.

6. Pour tout $(y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}} + \frac{y^2}{2\sqrt{2\pi t^{5/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) &= -\frac{y}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \\ \text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}} + \frac{y^2}{\sqrt{2\pi t^{5/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}}. \end{aligned}$$

On observe que l'on a bien $\frac{\partial f}{\partial t}(y, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t)$.

Partie II

7. Par hypothèse, il existe $(x_0, t_0) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+$ tel que $u(x_0, t_0) \neq 0$.

On a donc $f(x_0)g(t_0) \neq 0$ et donc, par propriété des nombres réels, $f(x_0) \neq 0$ et $g(t_0) \neq 0$.

f et g ne sont pas nulles.

8. Pour tout $(x, t) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= f(x)g'(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= f'(x)g(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f''(x)g(t).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}u &\text{ est solution de (1)} \\ \Leftrightarrow \forall (x, t) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+, & \quad f(x)g'(t) = mf'(x)g(t) + \frac{1}{2}f''(x)g(t) \\ \Leftrightarrow \forall (x, t) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+, & \quad f(x)g'(t) = \left(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\right)g(t) \\ \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, & \quad g'(t) = \frac{mf'(x_0) + 1/2f''(x_0)}{f(x_0)}g(t) \quad \text{avec } x_0 \text{ tel que } f(x_0) \neq 0\end{aligned}$$

$g \text{ est donc solution sur } \mathbb{R}_+ \text{ de l'équation } y' = \lambda y \text{ avec } \lambda = \frac{mf'(x_0) + 1/2f''(x_0)}{f(x_0)} \in \mathbb{R}.$

On en déduit qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = C_1 e^{\lambda t}$.

9. On a vu dans la question précédente que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = \lambda g(t)$. Mais on a aussi vu que

$$\forall (x, t) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+, \quad f(x)g'(t) = \left(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\right)g(t).$$

En combinant ces deux informations on obtient que

$$\begin{aligned}\forall (x, t) \in [0; 1] \times \mathbb{R}_+, & \quad f(x)\lambda g(t) = \left(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\right)g(t) \\ \Rightarrow \forall x \in [0; 1], & \quad \lambda f(x)g(t_0) = \left(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\right)g(t_0) \quad \text{avec } t_0 \text{ tel que } g(t_0) \neq 0 \\ \Rightarrow \forall x \in [0; 1], & \quad \frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x).\end{aligned}$$

De plus, $u(0, t_0) = 0$ et $u(0, t_0) = f(0)g(t_0)$, donc $f(0) = 0$ car $g(t_0) \neq 0$.

De même, $u(1, t_0) = 0$ nous donne $f(1) = 0$.

$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x) \text{ et } f(0) = f(1) = 0.$

10. (a) f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique associées est

$$r^2 + 2mr - 2\lambda = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4m^2 + 8\lambda = 4(m^2 + 2\lambda)$.

Comme $\lambda > -\frac{m^2}{2}$, cette équation admet deux racines réelles distinctes :

$$r_+ = -m + \sqrt{m^2 + 2\lambda} \text{ et } r_- = -m - \sqrt{m^2 + 2\lambda}.$$

D'après notre cours, on sait alors qu'il existe deux réels a et b tels que

$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = ae^{r_+x} + be^{r_-x}.$

(b) À l'aide des conditions au bord on obtient alors que :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{r_+} + be^{r_-} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(e^{r_+} - e^{r_-}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

car $e^{r_+} - e^{r_-} \neq 0$.

La fonction f est alors la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec la question 7.

11. Si $\lambda = -\frac{m^2}{2}$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et f est alors de la forme

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = (ax + b)e^{r_0 x}.$$

Les conditions au bord donnent alors $b = 0$ et $(a + b)e^{r_0} = 0$ donc une nouvelle fois, f est nulle ce qui est en contradiction avec la question 7.

12. (a) Cette fois, l'équation caractéristique admet deux racines complexes

$$-m + \beta\sqrt{-m^2 - 2\lambda} \text{ et } -m - \beta\sqrt{-m^2 - 2\lambda}.$$

D'après notre cours, il existe alors deux réels a et b tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1], \quad f(x) &= e^{-mx} \left(a \cos(\sqrt{-m^2 - 2\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-m^2 - 2\lambda}x) \right) \\ &= (a \cos(\pi l x) + b \sin(\pi l x)) e^{-mx} \end{aligned} \quad \text{avec } l = \frac{\sqrt{-m^2 - 2\lambda}}{\pi}.$$

$$\boxed{\forall x \in [0; 1], f(x) = (a \cos(\pi l x) + b \sin(\pi l x)) e^{-mx}.$$

- (b) $f(0) = 0$ implique que $a = 0$. On a donc $f(x) = b \sin(\pi l x) e^{-mx}$. De plus on a

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow b \sin(\pi l) e^{-m} = 0 \Leftrightarrow b \sin(\pi l) = 0.$$

Mais comme f n'est pas la fonction nulle, on a nécessairement $b \neq 0$ donc on en déduit que $\sin(\pi l) = 0$ et donc $l \in \mathbb{N}$. Mais une nouvelle fois, comme f n'est pas la fonction nulle, on a nécessairement $l \neq 0$.

Ainsi $\boxed{a = 0, b \neq 0 \text{ et } l \in \mathbb{N}^*}$.

13. Dans les questions précédentes nous avons montré que si u est non nulle et solution de (1) et (2) et est de la forme $(x, t) \mapsto f(x)g(t)$ alors il existe des réels C_1, m, λ, b et l tels que

$$(\star) \quad \begin{cases} \lambda < -\frac{m^2}{2} \\ b \neq 0 \\ l \in \mathbb{N}^* \\ \forall x \in [0; 1], f(x) = b \sin(\pi l x) e^{-mx} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = C_1 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Réciproquement, un rapide calcul (*que je vous laisse faire*) permet de vérifier que si on prend deux fonctions f et g vérifiant les critères ci-dessus, alors la fonction $u : (x, t) \mapsto f(x)g(t)$ est bien solution de (1) et (2).

Les couples (f, g) tels que la fonction $u : (x, t) \mapsto f(x)g(t)$ est bien solution de (1) et (2) sont exactement les couples vérifiant (\star) .

Partie III

14. On sait que $\lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \det(M - \lambda I_2) = 0$.

$$\text{Or } \det(M - \lambda I_2) = (a - \lambda)^2 - bc.$$

b et c étant strictement positifs, $(a - \lambda)^2 - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda = a - \sqrt{bc}$ ou $\lambda = a + \sqrt{bc}$ et ces deux solutions sont distinctes.

$$\text{On a donc } \boxed{\text{sp}(M) = \{a - \sqrt{bc}; a + \sqrt{bc}\}.$$

De plus, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$MX = (a + \sqrt{bc})X \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{b}{c}}x,$$

$$\text{Donc } \boxed{E_{a+\sqrt{bc}}(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{b}{c}} \end{pmatrix} \right)}. \text{ De même, } \boxed{E_{a-\sqrt{bc}}(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{b}{c}} \end{pmatrix} \right)}.$$

15. Pour tout $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
(MX^{(l,r)})_i &= \sum_{j=1}^n M_{i,j} X_j^{(l,r)} \\
&= bX_{i-1}^{(l,r)} + aX_i^{(l,r)} + cX_{i+1}^{(l,r)} \\
&= br^{i-1} \sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{n+1}\right) + ar^i \sin\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) + cr^{i+1} \sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{n+1}\right) \\
&= br^{i-1} \left(\sin\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) \right) \\
&\quad + ar^i \sin\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) \\
&\quad + cr^{i+1} \left(\sin\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{il\pi}{n+1}\right) \right) \\
&= \frac{b}{r} \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) X_i^{(l,r)} - \frac{b}{r} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) Y_i^{(l,r)} + aX_i^{(l,r)} \\
&\quad + cr \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) X_i^{(l,r)} + cr \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) Y_i^{(l,r)} \\
&= \left(a + \left(cr + \frac{b}{r} \right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right) X_i^{(l,r)} + \left(cr - \frac{b}{r} \right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) Y_i^{(l,r)}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que le calcul précédent est aussi valable pour $i = 1$ et $i = n$ car pour $i = 1$, $\sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{n+1}\right) = 0$ et pour $i = n$, $\sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{n+1}\right) = 0$ (car l est un entier).

On a donc bien montré que
$$MX^{(l,r)} = \left(a + \left(cr + \frac{b}{r} \right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right) X^{(l,r)} + \left(cr - \frac{b}{r} \right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) Y^{(l,r)}.$$

En prenant la relation précédente avec $r = \sqrt{\frac{b}{c}}$, on a $cr - \frac{b}{r} = 0$ donc

$$MX^{(l,\sqrt{b/c})} = \left(a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right) X^{(l,\sqrt{b/c})}.$$

Comme $X^{(l,\sqrt{b/c})}$ n'est pas nul, on en déduit que

$$X^{(l,\sqrt{b/c})} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } \lambda^{(l)} = a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right).$$

Partie IV