DM 16

Bio Spé

Oral 2024 Réponses

Question de cours

On demande la version simple vue en première année pas celle de deuxième année sur les intégrales impropres
Soit u et v deux fonctions **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[a;b]$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice préparé

1.
```python
import  random as rd
def simul(n):
    NbUrne=[0,0,0] #nb de bille dans chaque urne
    for i in range(n):
        r=rd.randint(0,2) #décalage indice tableau
        NbUrne[r]+=1
    NbVide=0
    for i in range(3):
        if NbUrne[i]==0:
            NbVide+=1
    return NbUrne[0],NbVide
```

2.
```python
N=10**5
S1,S2,S3=0,0,0
for i in range(N):
    X,Y=simul(10)
    S1+=X
    S2+=Y
    S3+=X*Y

print("E(X)=", S1/N)
print("E(Y)=", S2/N)
print("E(XY)=", S3/N)
print("Cox(X,Y)=", -S1*S2/N**2+S3/N)
```

On obtient

```
E(X)= 3.3299
E(Y)= 0.05123
E(XY)= 0.17187
Cov(X,Y)= 0.0012792229999999996
```

$$\boxed{\text{La covariance de } X \text{ et } Y \text{ semble nulle.}}$$

3. (a) X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et $n = 2$ et Y peut prendre les valeurs 1 et 2, car il ne peut pas rester 3 urnes vides , ni 0 urnes vides car on ne place que deux billes

   Le jour de l'oral commencer par tracer le tableau avec les valeurs que vous avez trouvées au tableau **puis** justifier à l'oral certaines valeurs. Commencez par placer et justifier les valeurs nulles

$Y \backslash X$	0	1	2	loi Y
1	$2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 2$	0	$\frac{6}{9}$
2	$2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{3}{9}$
loi X	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

   (b) Les lois marginales de X et Y s'obtiennent en faisant la somme sur les signe et les colonnes ! Attention à savoir justifier avec le théorème des probabilités totales.

   Par exemple

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = 1) + \mathbb{P}(Y = 2, X = 1)$$

   (c) Il faut citer le théorème de transfert et la formule de KH, ne pas simplifier les fractions trop tôt

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{4}{9} \\
&= \frac{6}{9} \\
E(Y) &= 1 \times \frac{6}{9} + 2 \times \frac{3}{9} \\
&= \frac{12}{9} \\
E(XY) &= 1 \times 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times 1 \times \frac{4}{9} + 1 \times 2 \times 0 + 2 \times 0 \times \frac{2}{9} + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times \frac{1}{9} && \text{th transfert} \\
&= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

   Donc

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{8}{9} - \frac{6 \times 12}{9 \times 9} = 0$$

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = 0}$$

   Une question supplémentaire, à l'oral serait sûrement « peut on dire que X et Y sont indépendantes ? ».

4. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.

   (a) X compte le nombre de succès "la boule i tombe dans l'urne 1 " lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et identiques, la probabilité d'un succès est $\frac{1}{3}$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/3),\ E(X) = \frac{n}{3},}$$

(b) Y_i ne peut prendre que deux valeurs 1 et 0, elle suit donc une loi de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

"Aucune bille ne tombe dans l'urne i "$=$ " toutes les boules tombent dans les deux autres urnes"
On peut aussi remarquer que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\boxed{\text{Pour } i \in [\![1;\,3]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

Donc comme $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3)$

$$\boxed{E(Y) = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

(c) le résultat n'est pas valable pour $i = 1$.
Supposons par exemple que $i = 2$, $[X = j] \cap [Y_2 = 1]$ se réalise si et seulement si j billes tombent dans l'urne 1 , 0 billes tombent dans l'urne 2 et $n - j$ billes tombent dans l'urne 3. Il faut choisir parmi les n tirages ceux qui donnent 1

$$\boxed{\forall i \in \{2,3\}, \forall j \in [\![0;\,n]\!]\,, \qquad \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.}$$

(d) Soit $i \in \{2,3\}$

$$\begin{aligned}
E(XY_i) &= \sum_{j\in[\![0;\,n]\!],y\in\{0,1\}} jy\,\mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = y\right) && \text{th de transfert}\\
&= \sum_{j\in[\![0;\,n]\!]} j\,\mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) && \text{termes nuls}\\
&= \sum_{j\in[\![0;\,n]\!]} j\binom{n}{j}\frac{1}{3^n}\\
&= \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\\
&= \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} && \text{formule classique}\\
&= \frac{n}{3^n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} && \text{chg d'indice}\\
&= \frac{n}{3^n}(1+1)^{n-1} && \text{formule du binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } i \in \{2,3\},\ E\left(XY_i\right) = n\frac{2^{n-1}}{3^n}}$$

Astuce On peut aussi remarquer que

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = 2^n \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = 2^n\frac{1}{2}$$

en reconnaissant l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
On constate que pour $j \neq 0$

$$\mathbb{P}\left(X = j \cap Y_1 = 1\right) = 0$$

donc

$$E(XY_1) = 0 \times 1\,\mathbb{P}\left(X = 0 \cap Y_1 = 1\right) + 0$$

$$\boxed{E\left(XY_1\right) = 0}$$

(e) On commence par calculer $E(XY)$

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X(Y_1+Y_2+Y_3)) \\ &= E(XY_1) + E(XY_2) + E(XY_3) \\ &= n\frac{2^n}{3^n} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de König-Huyggens

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov} X, Y &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= n\frac{2^n}{3^n} - \frac{n}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Cov} X, Y = 0}$$

X et Y ne sont pas indépendantes !